モンスター
群のひろがり

モンスター
群のひろがり

原田耕一郎著

岩波書店

はじめに

群が見せてくれる世界はおもしろい．数学的対象が群を通して見せてくれる世界がおもしろいのである．世の中のものは乱雑である．少なくともそのように見える．その中に数学で扱える世界を見出していくのである．たぶんどの世界にもそれなりの秩序はあるのだろうが，我々の目にはそれが良く見えないのである．しかしそのうちに誰かがその乱雑に見える世界に秩序があることを発見する．秩序があることが発見されると，その発見の過程に群が生ずる．

上で述べたことを数学の言葉に置き換えると，秩序とは，考えている数学的対象の持つ対称性のことを意味している．正三角形が対称性を持つことは誰にでもすぐわかる．正三角形の中心の周りの 120 度の回転は正三角形をもとの位置にもどす．回転するところを見ていなければ，回転したことはわからない．120 度の回転を 3 回繰り返すと，正真正銘もとの位置にもどる．反転と合わせて，正三角形は全部で 6 個の対称変換を持っている．それら 6 個の対称変換は変換の積に関して (1) 恒等変換を持つ，(2) 逆変換を持つ，(3) 結合律が成立する，という 3 つの条件を満足していて，群という数学的構造を持っている．すなわち，正三角形の対称変換群は位数 6 の (二面体) 群である．3 個の文字の集合 a,b,c の並べ変えのなす変換全体も群をなし，その位数は 6 (のやはり二面体群) である．しっかりとした幾何学的構造を持った正三角形も単なる 3 個の文字 a,b,c の上の対称 (変換) 群もまったく同じ構造を持つ．正四角形の対称変換群は位数 8 の二面体群となり 4 個の文字の集合 a,b,c,d の対称 (変換) 群は位数 24 である．すなわち 4 個になると群は正四角形と 4 個の文字 a,b,c,d が違うことを示す力を持っている．しかし，これらの数学的対象の例は簡単すぎて群の威力はとくにない．

また，はじめから対称であるとわかっている事物の対称変換群を考えてもあまり意味のあることは出てこない．かくれた対称性を発見してそこに群が作

用していることを見出すと群は力を発揮する．

アーベルがその数年前に解決してはいたのだが，ガロアは（1830 年頃），16 世紀にできた「3，4 次方程式の解法」以来，数学者が 250 年もかかっても解けなかった「5 次方程式のベキ根による解法は不可能である」ということを証明するのに群を使った．ガロアは有理数体上に代数方程式の根を付加してできる拡大体には根の置換から生ずる対称変換のなす群，すなわち自己同型群が存在することを発見した．拡大体そのものは無限個の元を含むが，その自己同型群は有限群である．そして自己同型群の構造により「5 次方程式の解法は不可能である」ことが見通し良く証明されてしまうのである．細部を丁寧に述べれば確かに数十ページからの論文が必要であろう．しかし，証明方針だけなら 1 時間もあれば述べることができる．それが画期的な考え方というものである．

群は，このように，ある数学的対象の上に作用する対称変換群として生じ，その数学的対象を研究するのに役立つのであるが，積が定義された集合で，条件（1）単位元を持つ，（2）逆元を持つ，（3）結合律が成立する，を満足する抽象群自体の研究もおもしろく，また重要である．そして群の中でも特に単純群の研究が重要である．群 G の部分群 N による剰余空間 G/N が自然に群になるとき N を正規部分群というが，G の構造は 2 つの群 G/N, N の構造によりほぼ決定される．ゆえに G または単位群以外に正規部分群を持たない群が重要な研究課題になる．そのような群は単純群と呼ばれる．

群を数学的構造を持った集合として明確な形で誕生させたガロアは単純群を確かに意識していた．現在，$PSL(2,p)$ と呼ばれている群を，ガロアは各素数 p に対して定義したが，それが単純群であると，決闘の前夜，友人シュバリエへ書いた手紙の中で述べている．数学のどの部門でも同じようなことは起こるが，群論でも，それが数学的対象の上の対称変換群として扱われようとも，また純粋な抽象群としての群の研究として扱われようとも，単純群を分類し尽くすことが必要である．そして，群論はそれを完成させれば，理論としてはほぼそれで十分と言える．群論における最大の課題となった単純群の分類は，ガロアの死後 150 年を経た 1981 年に完了されることになる．素数位数の可換な単純群は無視するとして，単純群は 3 種類にわかれる．

(1) 交代群.

(2) 線形群＝リー型の群.

(3) 26 個の散在型の群.

交代群にも，16 種類に細分することのできるリー型の群のそれぞれの種類にも，無限個の単純群が属している．それに比べて (3) に属するものは 26 個しかない．しかし，単純群論において，交代群やリー型の群を根や幹とすれば，26 個の散在型単純群はその花であろう．交代群やリー型の群が，26 個の散在型の群の存在の原因になっていることは疑いない．そして，単純群論は 26 個の花を付けたことによって，単なる数学的構造物から，美しい構造物へと変化した.

散在型単純群のなかで位数の一番小さいのは 11 個の文字の上の置換群のマシュー群 M_{11} であって，その位数は 7920 である．群を習い始めの頃はこれでも大きい群である．マシューが 1860 年代に発見している.

M_{11} からその間にある散在型単純群 24 個を飛び超えると，散在型単純群のなかで位数の一番大きいモンスター (群) に達する．その位数は 54 桁の数である．愛称として付けられたモンスターという名が本名のようになってしまった．その名の通り，大きくてなかなか手がつけられない．秘密をたくさん持っている群でもある．26 個の散在型の群のうち 20 個までがモンスターの部分群として現われるのがまたおもしろい．本書はモンスターについて主として述べることにする．モンスターのことが良くわかれば他の散在型単純群のこともほぼわかるであろう.

「モンスター」に主題をおいたが，この本でも，やはりまずシローの定理から始めることにした．数学上のことに関して幸運であるとか不幸にもとか言うのは避けたい表現だが，シローの定理が成立して群論は実に幸運だった．なぜあんな良い定理が成立しているのか不思議になるくらいである．だが各素数についてのシロー群が複雑に絡み合って群全体ができている様子はシローの定理からではなかなか容易には見えない．正規部分群がどのようにしてでき上がっているかが，わからないのである．そのため単純群全部の分類は実際問題としては長い間研究対象にならなかった．それを大きく変えたのが (本書ではふれないが) トンプソンによる一連の仕事である．群のシロー群から派

生する様々な正規化群の群への働き方を徹底的に追究して強力な定理を発見し，単純群の分類が不可能ではないことを示唆してくれた．実際，トンプソンが現われてからほぼ25年後に，単純群はすべて分類されることになる．その間，21個の新単純群が出現したのも群論の研究に勢いを与えてくれた．しかし，なかでも，モンスターという散在型単純群が存在していて群論は幸運だった．純粋な意味での抽象群論はシローの定理に始まってモンスターの発見でほぼ終わっていると言える．ただしモンスターにたどり着いてみたら，そこに群論では今までに見たこともない世界が広がっていたのである．群が語りかけてくれる世界は本当に広がっていたのである．そのことが本書の主題である．

第2章は「群の表現」と表題がつけてあるが，本書を読むのに必要なことしか述べてない．同じことは第4章で少し述べた保型関数論にも言える．第5，第6章は頂点作用素代数に当てられている．第6章では現在発展中の宮本雅彦の理論を主として述べてある．第7章では物理の弦理論の初歩を述べた．頂点作用素は物理学者が弦理論の中で発見している．数学者によって再発見され，頂点作用素代数として形が整えられ，公理化されることになった．

本書では定理-証明という形では書かれていない．証明を全部追わずに現代数学の趨勢を知るのは必要である．

本書は群論の素養をかなり仮定している．セミナーなどで仲間と読み合うのがよいと思う．また，どんどんとばして読むことも勧める．自分で研究を始めてそれらの結果を使うときになってはじめて証明を読めばよいであろう．

本書の出版までには，数学上の先輩，後輩には誤りを指摘していただき，そして岩波書店編集部の方々にはご尽力いただいた．また家族，友人も励ましてくれた．ここに感謝する．

1999年2月

原田 耕一郎

目　次

記号表

$\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$：整数環，有理数体，実数体，複素数体

$\mathbb{Z}_+,\mathbb{Z}_-$：正の整数，負の整数

$\mathbb{N}$：自然数の集合（0 も含める）

$\mathbb{M}$：モンスターと呼ばれる散在型単純群

$GF(q)$：位数 q の有限体

$[x,y]=x^{-1}y^{-1}xy$：x と y の交換子

$[G,G]=G'$：群 G の交換子群

$G\triangleright N$：N は群 G の正規部分群

$G>H$：H は G の真部分群

$A^g=g^{-1}Ag$：群 G の部分集合 A の元 g による共役

$\langle a,b,\cdots\rangle$：元 $a,b,\cdots$ で生成された群，環など

$|S|_p$：有限集合 S の元の個数 $|S|$ の p ベキ部分

$\Phi(G)$：群 G のフラッティニ部分群

$\mathrm{Irr}(G)$：群 G の既約表現全体の集合

$\mathrm{ch}(G)$：群 G の指標環

Z_n：位数 n の巡回群

$\prod_{i=1}^{n}$：直積記号

$\coprod_{i=1}^{n}$：直和記号

$S\backslash T$：集合 S における部分集合 T の補集合

$T(V),\Lambda(V)$：ベクトル空間 V のテンソル代数，外積（交代積）代数

$Mathieu_1,Suzuki$ などは散在型単純群を表わす（付録 1 参照）

$U(\mathfrak{g})$：リー代数 $\mathfrak{g}$ の展開環

$V=\prod_{i\in\mathbb{Z}}V_i$：頂点作用素代数

$Y(v,z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}v_nz^{-n-1}$：頂点作用素

$\mathbf{1}$：真空元

ω：ヴィラソロ元

Vir : ヴィラソロ代数

Vir_c : 中心電荷 c のヴィラソロ代数

$e : V_2$ の共形元，中心電荷 c_e，$Y(e,z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_e(n) z^{-n-2}$

$[L_e(m), L_e(n)] = (m-n)L_e(m+n) + \frac{1}{12}(m^3-m)c_e\delta_{m+n,0}$

Vir_e : 1, e_n, $n \in \mathbb{Z}$ で張られた $\mathrm{End}(V)$ の部分リー代数

S_e : e_n, $n \in \mathbb{Z}$ で生成された $\mathrm{End}(V)$ の部分環

$V_e = S_e \cdot \mathbf{1}$

$M(c,h)$: ヴィラソロ代数 Vir_c のヴァーマ加群，最高ウエイト h

$\widetilde{M}(c,0) = M(c,0)/U(Vir_c)L(-1) \cdot u_0$, u_0 : 最高ウエイトベクトル

$L(c,h) = M(c,h)/J$, J : $M(c,h)$ の唯一の極大部分加群

第 1 章

群論入門

集 合

「もの」の「集まり」を**集合**と呼ぶ.「『もの』とは何であるか,『集まり』とは何であるか」ということを考え始めると，なかなか難しいことになる．また深刻な問題も提起する．人間の持つ言葉，そして人間の理解力に由来する制約もあろうが,「もの」とか「集まり」という概念は数学的対象として厳密に定義することができないのである．そもそも厳密という言葉の意味すら明確でない．だからといって，整数全体からなる「集まり」

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 3, \cdots\}$$

のように単純明解な集合をも数学的対象として扱えないのでは不便であろう．概念的な不明瞭さを不問にして，その有用性を追究するのを**素朴集合論**と言う．集合論の一部としての群論は素朴集合論と思ってよい．

集合に属している「もの」 a をその集合の**元**と呼ぶ．与えられた集合 S に属する 2 つの元 a, b をとるとき，a と b の間には何の関係も仮定されていない．S に与えることのできる唯一の数学的概念は S に属する元の個数，すなわち S の**大きさ**(**基数**) $|S|$ だけである．

集合 S に**構造**を与えることもできる．その構造の種類によって，**位相空間**，**多様体**，**順序集合**，**代数**などと種々多様な名で呼ばれている．

代　数

集合 S の任意の2つの元 a, b に対して S の元 c がただ1つ与えられているとき，S には**2項演算**（**算法**）が定義されていると言う．広い意味で**代数構造**が入っていると言ってもよい．通常，c は a と b の**積**と呼ばれ，$c=ab$ と書かれる．ab と ba は一般には等しくないとする．$ab=ba$ が常に成立しているとき，S は**可換**であると言われる．

元 a, b に対してその積 c が与えられているだけでは，集合 S は数学としての有用性を持たない．それゆえ，S の上に定義された2項演算にいろいろな性質，規則を持たせることになる．S の元の間に2つの演算，**和**と**積**が定義されていて，その2つの演算の間に種々の条件が与えられていることもある．**環**，**体**などがその代表的なものである．

2つの集合 A, B の積集合 $A\times B$ から B への写像が与えられたとき，A は B に**作用する**と言う．**ベクトル空間**，**加群**などの概念がそれから生ずる．積と和が定義されたベクトル空間には狭い意味の**代数**（algebra），**リー**（S. Lie）**代数**，後の章で記述する**頂点作用素代数**などがある．頂点作用素代数には無限個の積が定義されている．だから積は ab でなく，$a_nb\,(n\in\mathbb{Z})$ となる．可換性 $a_nb=b_na$ など期待できないし，また結合律などその意味も明らかでない．ただし，後の章で**モンスター**（Monster）と呼ばれる位数最大の散在型単純群について述べるが，そのモンスターが作用する，**ムーンシャイン**（moonshine）**加群** $V^\natural$ と呼ばれる頂点作用素代数がある．その $V^\natural$ の**重さ2**の部分空間 $V_2^\natural$ の中では $a_1b=b_1a$ が成立し，しかも ω と書かれ，**ヴィラソロ**（M. A. Virasoro）**元**と呼ばれる特別な元が $V_2^\natural$ の中に存在して，$\left(\frac{\omega}{2}\right)_1 a=a$ がすべての $a\in V_2^\natural$ に対して成立している．すなわち，$ab=a_1b$ と定義すれば $V^\natural$ の重さ2の部分空間には単位元を持った可換代数の構造が入る．

代数は数学的対象が解析であっても幾何であっても，概念の不明瞭さ，曖昧さを取り除いてくれる．しかし，代数は規則だけで議論が進行するので，別に興味ある数学的対象をもっていて，代数を道具として使うのでないと，荒野を独りで歩くようで味気ないこともある．本書では単純群モンスターを興味ある数学的対象として代数を使う．モンスターは集合としても大きく約 10^{54} 個の元をもっている．モンスターのもたらす神秘的とも言える性質を理解す

るためには，それ自体複雑な構造をもった無限次元のベクトル空間である $V^\natural$ という頂点作用素代数が必要になるのである．その頂点作用素代数ですべてが明白になったかというと，そうではない．少しずつ理解が深まりつつあるが，本当の解決は 21 世紀のことになるであろう．

群

代数構造をもった集合の 1 つに**群**がある．群 G はただ 1 つの算法，すなわち積だけを持ち，さらに次の条件を満足する．

(1) G は**単位元** e を持ち，$ae=ea=a$ が G のすべての元 a に対して成立している（e は 1 と書くことが多い）．

(2) G の任意の元 a に対して，**逆元** a^{-1} が G の中に存在して，$aa^{-1}=a^{-1}a=1$ が成立している．

(3) **結合律** $(ab)c=a(bc)$ が G の任意の元 a,b,c に対して成立している．

例をあげよう．G として行列式が 0 でない $n\times n$ の行列全体からなる集合をとる．行列成分は体 K の元であるとすれば，条件 (1)(2)(3) は成立していて，G は群となる．この群は $GL(n,K)$ と書かれ，**一般線型群**と呼ばれている．行列成分を可換環 R からとると，行列式が R の単元のときに限って，(2) で要求される逆元が存在する．例えば，G として，整数環 $\mathbb{Z}$ を成分とし，行列式が 1 の n 行 n 列の行列（$n\times n$ 行列）全体からなる集合とすれば，G は群となり，$SL(n,\mathbb{Z})$ と書かれ，**特殊線型群**と呼ばれている群の 1 つである．

行列の集合には，通常の積以外の積も定義することがある．$A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$ を $n\times n$ の行列とするとき，

$$A\circ B=C=(c_{ij}),\qquad c_{ij}=a_{ij}b_{ij},$$

と定義された積を**アダマール**（J. S. Hadamard）**積** と言う．G として行列成分が体の 0 でない元からなる $n\times n$ 行列全体の集合とすれば，G はアダマール積に関して群となっている．しかし，群が定義されたからといって，それが数学的に有用な集合とは限らない．

A,B を前と同じく，$n\times n$ 行列とするとき，

$$A*B=\frac{1}{2}(AB+BA)$$

として積を入れることもある．I を通常の単位行列，A^{-1} を通常の逆元とすれば，$A*I=I*A$，$A*A^{-1}=A^{-1}*A$ は成立している．しかし，結合律 $(A*B)*C=A*(B*C)$ は一般には成立していない．ただし，条件

(3′) $A*B=B*A$,　$(A*A)*(B*A)=((A*A)*B)*A$

は成立している．(3′)を満足する代数は**ジョーダン**(E. P. Jordan)**代数**と呼ばれている．物理学者のジョーダンが研究し始めたことに由来する．

以上をまとめると次のようになる．行列の集合には通常の積の他にアダマール積，ジョーダン積などを定義することができるが，群として有用なものは，通常の積だけである．以下，行列の積は通常のものとする．行列の積は，行列を(線型)変換として考えたときの写像としての積である．群はそもそも変換群(置換群)として発生したのである．発生したときのみならず，現代数学においても，群は，数学的対象物の上の変換群，置換群，対称群などとしてとらえるときに最大の威力を発揮する．変換からなる集合であれば，それは積に関して閉じていて，単位元が存在し，結合律が成立している．逆元が存在するということは，群という概念が一般的すぎて統制できなくなることを防いでいる．

部分群，剰余空間

群 G の部分集合 H がそれ自身群となっているとき，H を G の**部分群**と言う．H の元の積は群 G においてすでに定まっているものとする．当然，H の単位元と G の単位元は同じものである．G の元 g を 1 つとり，

$$gH=\{gh\,|\,h\in H\}$$

と定義すると，G の 2 つの元 g, g' に対して，$gH=g'H$，または $gH\cap g'H=\phi$ となり，前者は $g^{-1}g'\in H$ のときに限り成立する．ゆえに，

$$G=\bigcup_{g\in G} gH$$

と部分集合の直和に分解することができる．gH を 1 つの元とみなしたときの

集合 $\{gH \mid g \in G\}$ を G の H による**剰余空間**と呼び，G/H と書く．G の部分集合 $\{g_i\}_{i\in I}$ で，$i \neq j$ のとき $g_iH \neq g_jH$ で，

$$G = \bigcup_{i\in I} g_iH$$

となっているものがとれる．そのような G の部分集合は，G の H による剰余空間 G/H の(**完全**)**代表系**という．$|H|=|gH|$ であるから，次の主張が成立する．

ラグランジュ(J. L. Lagrange)の定理　G を有限群として，H をその部分群としよう．そのとき $|H|$ は $|G|$ の約数である．∎

群論を学ぶということは，群というものの描像を得ることである．ラグランジュの定理は，群が単なる集合ではないことを語ってくれる．

$$G = \bigcup_{g\in G} gH$$

という直和分解は無限群でも成立しているのだから，ラグランジュの定理は無限群でも成立しているという描像が正しい．$|G:H|=|G/H|$ と定義して，H の G における**指数**と言う．もちろん，指数が無限のこともある．

正規部分群，剰余群

群のように構造を持った代数を研究するということは，群を**同型**(群としては同じとみなせるもの)を除いて分類し，そしてその各々の同型類に属する群の性質を調べあげることである．そうではあるが，そのような詳細な分類は，実際問題としては不可能であったり，不必要であったりする．そこで，さらに強い条件の下に群を分類するのを目標とするのがよい．このようにして，**単純群**という概念が生まれる．

まず**正規部分群**を定義しよう．N を群 G の部分群とするとき，その剰余空間が自然に群となっているとき，N を正規部分群という．自然とは，G/N の元の積を $gNg'N=gg'N$ で定義することである．これは，G の任意の元 g に対して，$gN=Ng$ が成立していることと同値である．

一般に A を群 G の部分集合，g を G の元とするとき，$g^{-1}Ag$ を A の(g による)**共役**という．共役は**同値関係**であり，同値類は**共役類**と呼ばれる．部

分群 N の G の元による共役がすべて N に等しいとき，N を正規部分群というのである．群 G の持つ本質的な性質は 2 つの群 N, G/N に受け継がれる．よって，群 G に関する問題を解くことは，群 N, G/N の対応する問題を解くことに帰着する．$|G|=|N||G/N|$ であるから，$G\neq N\neq 1$ であれば N, G/N はともに G よりも小さい群であり，その構造は，G の構造よりも簡単である．群 G に関する問題がより容易な問題に帰着できるのである．

群 G 自身と単位元 1 からなる**単位群** $\{1\}$ は**自明**な正規部分群である．自明でない正規部分群を持たない群を**単純群**という．単純群に関する問題は，より簡単な構造を持つ群に帰着させることはできないので，それ自身で解かなければならない．一方，すべての単純群が分類でき，そして各々の単純群についての情報がわかれば，すべて群の性質も本質的には解明されることになる．

シローの定理

G を有限群とするとき，G の**位数** $|G|$ は G の構造にどんな意味を持っているだろうか．S が単なる集合であれば，基数 $|S|$ の集合も，基数 $|S|+1$ の集合も同じようなものであろう．群の場合はそうではない．2 つの群 G_1, G_2 をとり，$|G_1|=n$, $|G_2|=n+1$ としよう．また，H_1 を G_1 の部分群とする．そのとき，ラグランジュ の定理によって，$|H_1|$ は n を割り切る．よって，$|H_1|$ は $n+1$ と素であり，$H_1\neq 1$ ならば H_1 は G_2 の部分群とはなり得ない．群の構造はその部分群の相互関係によって定まっているわけだから，群 G_1 と G_2 は構造的にはまったく違うもの，ということができる．

群 G の構造は $|G|$ の約数の集合に依存しているのである．そこで $|G|$ を素因数分解する．

$$|G|=p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_r^{e_r}$$

「G の部分群の位数は $|G|$ の約数である」というラグランジュの定理は，部分群の存在に関しては，消極的だが，次に述べる**シロー**(P. L. M. Sylow)**の定理**は，各素因子 p_i に対して，G は位数 $p_i^{e_i}$ の部分群を持つことを積極的に主張する．そのような位数 $p_i^{e_i}$ の部分群は**シロー p_i 部分群**と呼ばれる．一般に，p_i のベキの位数を持つ部分群は **p_i 部分群**といわれる．

シローの定理　G を有限群とし，p を $|G|$ の任意の素因数としよう．そのとき，次の命題が成立する．

（a）シロー p 部分群は存在する．

（b）すべてのシロー p 部分群は互いに共役である．

（c）シロー p 部分群の個数は p を法として 1 に等しい．

（d）すべての p 部分群はあるシロー p 部分群に含まれる．　▎

この 4 つの命題からなるシローの定理は，19 世紀の後半に発見されたのだが，その一般性，簡明性，応用性，究極性において，有限群論の他の定理に比べるものがない．ここで，究極性とは，この定理を真に含む定理がないことを意味する．証明も流れるように進行するので述べておこう．まず，

コーシー（A. L. Cauchy）の定理　有限群 G の位数が素数 p で割り切れれば，G は位数 p の元を含む．　▎

次の集合 S を考える．

$$S=\{(x_1,\cdots,x_p)\,|\,x_i\in G,\ x_1,\cdots,x_p=1\}$$

$|S|=|G|^{p-1}$ である．S の上の置換 $\sigma:(x_1,\cdots,x_p)\to(x_2,\cdots,x_p,x_1)$ を考える．すると

（1）$|S|\equiv 0 \pmod p$.

（2）$\sigma^p=1$.

（3）σ は $(1,1,\cdots,1)$ を固定する．

よって，σ は S の $(1,1,\cdots,1)$ 以外の元 $(x_1,x_2,\cdots,x_p)$ を固定する．S の定義と σ の作用により，$x_1=\cdots=x_p\neq 1$ で $x_1^p=1$ である．すなわち，x_1 が求める位数 p の元である．

コーシーの定理のこの証明は簡明ではあるが，誰でもすぐ思いつく証明とは言えないだろう．群は集合と異なり，元を 1 つでも取り去ればもう群でなくなる．コーシーの定理のように，1 つの特別な元の存在を主張するような命題の場合も，群全体または，その部分群を考えていくのが正しい．

さて，シローの定理の証明を復習してみよう．まず，シロー p 部分群の存在を群の位数による数学的帰納法で証明することにする．$\{g_i\}_{i\in I}$ を G の元の共役類の代表系とすれば

$$|G| = \sum_{i \in I} \frac{|G|}{|C_G(g_i)|}$$

が成り立つ．これを**類方程式**と言う．また，$C_G(g_i) = \{g \in G \mid gg_i = g_i g\}$ であり，g の G における**中心化群**と呼ばれる．$C_G(g_i)$ が 真部分群で，しかも $|G:C_G(g_i)|$ が p で割り切れなければ，$C_G(g_i)$ の p シロー部分群は G のシロー p 部分群となる．ゆえに，すべての $i \in I$ について，$C_G(g_i)$ は G と一致するか，または，$|G:C_G(g_i)| \equiv 0 \pmod{p}$ としてよい．

$|G| \equiv 0 \pmod{p}$ だから G の**中心** $Z(G) = \{g \in G \mid gh = hy, \forall h \in G\}$ の位数が p で割り切れることになり，コーシーの定理を使えば，$Z(G)$ に位数 p の元 a が存在する．a で生成された群 $\langle a \rangle$ は G の正規部分群だから，剰余群 $G/\langle a \rangle$ に数学的帰納法を使うことができ，G のシロー p 部分群が $G/\langle a \rangle$ のそれの逆像として構成される．G の中心 $Z(G)$ はアーベル群なので，シローの定理の証明のためだけならばコーシーの定理を持ち出すこともなかった．

上に述べたシロー p 部分群の存在証明は簡明で，類方程式を使うということさえ覚えておけば問題ない．しかし，帰納法を使うので，シロー p 部分群の実際の構成には役立たない．

例えば，20 次の対称群 S_{20} のシロー 2 部分群で見てみよう．20 は 2 進法で書くと，10100 である．$20 = 4 + 16$ と言っているのである．S_4 のシロー 2 部分群は

$$\langle (12), (34), (13)(24) \rangle$$

である．直積 $S_2 \times S_2$ のシロー 2 部分群を位数 2 の群で拡大したのである．S_{16} のシロー 2 部分群は $S_8 \times S_8$ のシロー 2 部分群を位数 2 の元で拡大したものであり，S_8 のシロー 2 部分群は $S_4 \times S_4$ から同様な手法でできる．ゆえに，

$\langle \{(12), (34), (13)(24)\} \{\{\{(56), (78), (57)(68)\} \{(9,10), (11,12),$
$(9,11)(10,12)\}, (59)(6,10)(7,11), (8,12)\}, \{(13,14), (15,16), (13,15)(14,16)\},$
$\{(17,18), (19,20), (17,19)(18,20)\}, \{(13,17)(14,18)(15,19)(16,20)\},$
$(5,13)(6,14)(7,15)(8,16)(9,17)(10,18)(11,19)(12,20)\}\} \rangle$

が S_{20} の 1 つのシロー 2 部分群となる．20! の素因数 2 のベキ指数は 18 で

上に述べた方法は 18 個の生成元を与える．

一般に，n 次の**対称群** S_n のシロー p 部分群 P は，n を p 進数で書き，$n=a_1p^{e_1}+a_2p^{e_2}+\cdots+a_sp^{e_s}$, $0<a_i\leqq p-1$, とすると，$P=\prod_{i=1}^{s}P_i^{a_i}$ である．ここで P_i は $S_{p^{e_i}}$ のシロー p 部分群であり，P_i は上に述べた $p=2$ に対応する方法により構成される．しかし，S_n に限らず，いかなる群においてもシロー部分群を実際に構成する必要はあまり起こらない．シロー部分群は存在すればよいのである．

P を G の 1 つのシロー p 部分群とし，$\mathfrak{S}$ を P の共役全体からなる集合としよう．

$$|\mathfrak{S}|=|G:N_G(P)|\not\equiv 0 \pmod p$$

である．ここで $N_G(P)$ は P の**正規化群**である．一般に，H を群 G の部分群とするとき，$N_G(H)=\{g\in G\,|\,g^{-1}Hg=H\}$ と定義して，$N_G(H)$ を H の G における正規化群という．H の異なる共役の数は $|G:N_G(H)|$ となる．

$Q\neq 1$ を G の任意の p 部分群とするとき，Q は $\mathfrak{S}$ の上に共役で作用し，$\mathfrak{S}$ の少なくとも 1 つの元を固定する．その 1 つを P_1 としよう．このとき P_1Q は群となる．$|P_1Q|$ が $|G|$ を割り切ることから，$Q\subset P_1$ が成立していなければならない．特に $|Q|=|P|$ のときは $Q=P_1$ となる．これによって，シローの定理のすべてが成立することがわかる．

シローの定理はその命題も証明もきわめて簡潔である．しかし，群という概念が数学者によって明確な形で把握されてから，数十年を経て初めて証明されている．とすると，シロー以前の数学者は群にどんな部分群が存在するか知らずに研究していたことになる．シローの定理を知っている我々は，有限群 G が与えられれば，$|G|$ をただちに素因数分解し，それぞれの素数 p についてシロー p 部分群，それから派生する正規化群，中心化群などを思い浮かべることができる．外形しかなかった集合に急に手足が付き，内臓もある群という数学的対象になる．シローの定理は実にありがたい．

コーシーの定理の証明のような置換群論的な手法をさらに押し進めることによって，ヴィーラント（H. Wielandt）はシローの定理を証明した．要点は次の通りである．

G を有限群として，$|G|=p^e m,\ p \nmid m$ とおく．

$$\Omega=\{S\subset G \mid |S|=p^e\}$$

としよう．すなわち，Ω は群 G の p^e 個の元からなる部分集合 S 全体からなる集合である．

$$|\Omega|=\binom{p^e m}{p^e}\not\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p)$$

が成立する．G は左から Ω の上に自然に作用する（$g:S\to gS$）．Ω を G **軌道** Ω_i の直和に分解して，

$$\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2\cup\cdots\cup\Omega_r$$

とする．$S_i\in\Omega_i$ を 1 つ決め，G_i を S_i の**固定群**とする．すなわち，

$$G_i=\{g\in G \mid gS_i=S_i\}$$

$g\in G_i$ のとき，$gS_i=S_i$ であるが，$g\neq 1$ ならば，g は S_i に含まれる G のどの元も固定しない．$|S_i|=p^e$ であったから，g の位数は p^e を割り切る．よって，すべての i に対して G_i は p 群である．

$$|\Omega|=\sum_{i=1}^{r}|\Omega_i|=\sum_{i=1}^{r}|G:G_i|$$

であるが，$|\Omega|\not\equiv 0\ \ (\mathrm{mod}\ p)$ であるから，ある i_0 が存在して

$$|G:G_{i_0}|\not\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p)$$

となる．G_{i_0} は p 群であったので，$|G_{i_0}|=p^e$ となる．これでシロー p 部分群の存在が証明された．もう少し丁寧に議論すると，シロー部分群の個数が p を法として 1 に等しいことなども言える．

このように初等的なシローの定理に紙数を割いたのは，シローの定理がやはり一番著しい結果であるし，その証明の手法が群論というものを見事に語っているからである．

p 群，ベキ零群，可解群

G を有限群とするとき，G の位数 $|G|$ の各素因数 p に対してシロー p 部分群が存在することはわかった．類方程式からただちに次の定理を得る．

定理　P を単位群でない p 群とするとき，P の中心 $Z(P)$ は単位元以外の元を含む． ∎

剰余群 $P/Z(P)$ も p 群であるから，p 群は中心を重ね合わせてできており，性質も可換群に近い．

いくつかの（異なった）素数 $p_1, \cdots, p_r$ に関する p 群 $P_1, \cdots, P_r$ の直積 $P_1 \times \cdots \times P_r$ となっている群を**ベキ零群**という．群 G の部分群の鎖（列）

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_s = \{1\}$$

が与えられていて，各 $0 < i \leqq s$ に対して，G_i が常に G_{i-1} の正規部分群となっているとき，与えられた鎖を**正規鎖**という．さらに各 i に対して剰余群 G_{i-1}/G_i が常にある p 群となっているような正規鎖が存在するとき，G を**可解群**という．ベキ零群はもちろん可解である．要するに，ベキ零群は p 群をいくつか横に並べたものであり，可解群は p 群の上に（他の）素因数に関する p 群を重ね合わせてできたものである．（G_{i-1} を G_i の G_{i-1}/G_i による拡大という．G_{i-1}/G_i の G_i による拡大ということもある．）ベキ零群にしても，可解群にしてもその本質的な性質は p 群の性質に帰着できる．p 群とか可解群を同型を除いて全部分類しつくすことは，実際問題として不可能であるし，また不必要である．ただし，全体でそれがどのくらいあるかを知っておくのは無意味でもなかろう．

定理　素数 p と自然数 n を任意に決めるとき，位数 p^n の p 群の同型類の個数は漸近的に

$$p^{a(n,p)n^3}, \quad a(n,p) = \frac{2}{27} + O(n^{-\frac{1}{3}})$$

で与えられる． ∎

$p=2$, $n \leqq 9$ のときの同型類の個数は，

2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512
個数	1	2	5	14	51	267	2328	56092	10494213

である[*1)].

単純群

いくつかの p 群による拡大では構成できない群を**非可解群**という．正規鎖

$$G=G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \cdots \supset G_s=\{1\}$$

がすべての G_i が異なり，これ以上の**細分**を持たないとき，これを**組成鎖**という．このとき，すべての $0<i \leqq s$ に対して剰余群 G_{i-1}/G_i は単純群となっている．G が非可解であれば，少なくとも 1 つの i に対して，G_{i-1}/G_i が非可解な単純群となっていなければならない．可解群の性質が p 群，さらには可換群の性質に帰着できるように，非可解群の性質も単純群の性質に帰着できる．実例を 1 つ示そう．

ある性質 (P) を持つ有限群の構造をすべて決定する問題を考えよう．(P) 群とは，群 G で性質 (P) を満たすものとする．例えば，(P) として，

(CA)： 有限群 G ですべての元 $a \neq 1$ の中心化群（Centralizer）は可換（Abelian）

を考えてみる．

定理 すべての (CA) 群は可解であるか単純である． ∎

この定理を群論の基礎は仮定して簡単に証明してみよう．有限集合 Ω の上の置換群 G が Ω 上可移であって，Ω の異なる 2 つの点を固定する G の元は単位元に限るとき，G を**フロベニウス**（F. G. Frobenius）**群**という．K を G の元で Ω のどの点をも固定しない元全体と単位元との和集合とすると，フロベニウスの定理によって K は G の（正規）部分群となり**フロベニウス核**と呼ばれる．a を Ω の（任意の）1 点とするとき，$C=\{g \in G \mid g(a)=a\}$ とすると，G は K と C の半直積となる．C は K の上に（単位元を除いて）**固定元なし**（fixed-point-free）に作用する．逆に，G が正規部分群 K と部分群 C との半直積であって，C が K の上に固定元なしに作用していれば，G は $\Omega=G/C$

[*1)] p 群の個数に関する漸近公式は G. Higman と C. Sims により，位数 128 以上の 2 群の個数は B. Eick と E. A. O'Brien らによる．

の上のフロベニウス群となる．さて，G を任意の (CA) 群として，A をその 1 つの極大可換部分群としよう．$a \neq 1$ を A の任意の元とするとき，a の中心化群 $C_G(a)$ は仮定より可換で $C_G(a) \supset A$ だから，A の極大性により，

$$C_G(a) = A, \quad \forall a \in A \backslash \{1\}$$

となる．特に，$|G:A|$ と $|A|$ は互いに素である．位数と指数が互いに素な部分群は**ホール** (P. Hall) **部分群**と呼ばれている．このように，G の極大可換部分群 A はすべてホール部分群となっている．G の任意の元 g に対して，A の共役 $A^g = g^{-1}Ag$ は

$$A^g = A \text{ または，} A^g \cap A = \{1\}$$

を満たすことも，ほとんど自明である．同じことだが，

$$g \notin N_G(A) \text{ であれば，} A^g \cap A = \{1\}$$

ということである．

(CA) 群 G が単純群であれば，定理の帰結は成立するわけだから，G は自明でない正規部分群 N を含むとしよう．このとき，G には N を含む部分群 H で，$|H:N|$ がある素数 p となっているものが存在する．H は N と位数が p のベキである元 a で生成されるとしてよい．

$$H = \langle N, a \rangle, \quad a^{p^e} = 1.$$

元 a を含む H の極大可換部分群を A としよう．H は G の部分群なので (CA) 群である．ゆえに，

$$h \notin N_H(A) \text{ であれば，} A^h \cap A = \{1\}$$

となっている．$N_H(A) > A$ と仮定しよう．A は H のホール部分群なので，r を $|N_H(A):A|$ を割り切る素数とすると，r と $|A|$ は素である．$b \neq 1$ を $N_H(A)$ の位数が r のベキの元とし，P を A のシロー p 部分群とするとき，$P \ni a$ であるが，

$$[b, P] \subset N$$

なので,

$$[b, P/P\cap N]=1$$

となる．ゆえに，$C_P(b)\neq 1$ となり，$A=C_H(a)$, $\forall a\neq 1$ に矛盾する．結論として,

$$N_H(A)=A$$

が証明できた．ゆえに,

$$A^h\cap A=\{1\}, \quad \forall h\in H\backslash A$$

となり，H はフロベニウス群となる．H のフロベニウス核 K は G の正規部分群 N の ホール部分群となっているので，G の正規部分群でもある．K はベキ零であるが，(CA) 群という仮定の下では，可換である．$G\triangleright C_G(K)\supset K$ であり，$C_G(K)=B$ が G の極大可換部分群であることも容易にわかる．B がホール 部分群であることにより，シューア・ザッセンハウス (I. Schur - H. Zassenhaus) の定理により，G の部分群 C が存在して，G は B と C の半直積になっており，C の元は B の上に固定点を持たないので G 自身もフロベニウス群となる．

以上まとめると，G を任意の (CA) 群とするとき，G はフロベニウス群であるか，または単純群であることが証明された．前者の場合，K をフロベニウス核，C をその補群とするとき，G が (CA) 群という仮定の下では，C は実は巡回群になる．特に G は可解である．引用定理を証明なしに記そう．

シューア・ザッセンハウスの定理 N を有限群 G の正規部分群で，$|G:N|$ と $|N|$ は互いに素とする．このとき，G の部分群 C が存在して，G は N と C の半直積となる． ∎

ザッセンハウスの定理 G をフロベニウス群，K をその核，C をその補群としよう．$p\neq q$ を素数とするとき，C の位数 p^2，または，pq の部分群はすべて巡回群である． ∎

トンプソン (J. G. Thompson) の定理 フロベニウス群 G のフロベニウス核は常にベキ零である． ∎

一般のフロベニウス群の核がベキ零であることには上記のトンプソンの定理を使わねばならないが，G が (CA) 群でしかもフロベニウス群とすれば，トンプソンの定理は実は必要ではない．それを示してみよう．

K を (CA) 群 G のフロベニウス核，C をその補群としよう．また，A を K の極大可換部分群とする．$c\in C$ のとき，$A^c=c^{-1}Ac\subset K$ であるが，A に含まれる K のシロー群の共役性を考えれば，$A^c=A^k$ と書ける．ゆえに，$N_G(A)K=G$ となる．$N_G(A)$ は A を核とするフロベニウス群であるが，$N_K(A)>A$ と仮定すると $N_G(A)/A$ も $N_K(A)/A$ を核とするフロベニウス群となる．フロベニウス補群はそれ自身フロベニウス群を含み得ないことは上のザッセンハウスの定理からわかるので，$N_K(A)=A$ となり，K 自身がフロベニウス群となる．とすれば，同じ理由により，$K=A$ となるしかない．すなわち，G のフロベニウス核 K は可換群となる．(CA) 群 G の補群 C は前に述べたように巡回群となるので，結局，G は可解となる．

有限群の証明は上の例のようになかなか息抜きができない．この (CA) 群は可解であるか単純であるという定理は 1920 年代に証明されている．それから 30 年を経て，鈴木通夫が単純な (CA) 群は偶数位数であることを証明した．鈴木の定理はファイト・ホール・トンプソン（W. Feit - M. Hall Jr. - J. G. Thompson）によって拡張され，中心化群がすべてベキ零（Nilpotent），すなわち単純な (CN) 群は偶数位数であるということが証明された．そして最終的には，ファイト・トンプソンが単純群は常に（素数位数でなければ）偶数位数であることを証明することになった．有限群論は新しい時代に入ったのである．1960 年代の前半であった．

単純群の例を 1 つ示す．これもやはり 1960 年頃に発見されている．上に述べたトンプソンの定理などとともに「新時代の到来を告げるのにふさわしい新単純群の発見（鈴木通夫）」であった．

$F=F_q$ を $q=2^{2n+1}$ $(n\geqq 1)$ 個の元を持つ有限体とし，$r=2^{n+1}$ とおく．$r^2=2q$ であり，写像

$$\theta : \alpha\to\alpha^r$$

は F の自己同型であり，$\theta^2=2$ を満たす．すなわち，

$$\alpha^{\theta^2}=\alpha^2, \quad \alpha\in F$$

である．さらに，α,β を F の任意の元とし，4×4 の行列 (α,β) を次のように定義する．

$$(\alpha,\beta)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 \\ \alpha^{1+\theta}+\beta & \alpha^\theta & 1 & 0 \\ \alpha^{2+\theta}+\alpha\beta+\beta^\theta & \beta & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q=Q(q)=\{(\alpha,\beta)\,|\,\alpha,\beta\in F_q\}$$

とおくと行列の積

$$(\alpha,\beta)(\gamma,\delta)=(\alpha+\gamma,\ \alpha\gamma^\theta+\beta+\delta)$$

により，Q は位数 q^2 の群となる．さらに，体 F の乗法群 F^* の元 k に対して行列 (k) を

$$(k)=\begin{pmatrix} \zeta_1 & & & \text{\huge 0} \\ & \zeta_2 & & \\ & & \zeta_3 & \\ \text{\huge 0} & & & \zeta_4 \end{pmatrix}$$

と定義する．ただし，ここで

$$\zeta_1^\theta=k^{1+\theta}, \quad \zeta_2^\theta=k, \quad \zeta_3=\zeta_2^{-1}, \quad \zeta_4=\zeta_1^{-1}$$

である．そこで

$$K=K(q)=\{(k)\,|\,k\in F^*\},$$

とおけば，K は位数 $q-1$ の巡回群で F^* に同型である．

$$(k)^{-1}(\alpha,\beta)(k)=(\alpha k,\beta k^{1+\theta})$$

となるので，積集合 QK は群となり，Q はその正規部分群となっている．$k\neq 1$ であれば，(k) による共役は $Q\backslash\{1\}$ のどの元も固定しない．さらにもう1つの行列 τ を

$$\tau=\begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}$$

で定義しよう．ここで，$\tau^2=1$ で $(k)^\tau=(k)^{-1}$ となっている．

$GL(4,F)$ の部分群で，$Q(q)$, $K(q)$, τ で生成されたものを

$$Sz(q)=\langle Q(q),\ K(q),\ \tau\rangle$$

とおく．**鈴木群** $Sz(q)$ は新単純群の無限系列であり，以下の性質がある．

（1）$|Sz(q)|=q^2(q-1)(q^2+1)$，$q=2^{2n+1}$，$n\geqq 1$，

（2）$Sz(q)$ は位数 $q\pm r+1$ の巡回群 A_+, A_- を持ち，

$$Sz(q)=\bigcup_{g\in G}(Q^g\cup K^g\cup A_+^g\cup A_-^g)$$

は，$Sz(q)$ を互いに（同一でなければ）共通部分（単位元以外）のない部分群の集合としての和に分解する（すなわち，$Sz(q)$ は**分割**（partition）を持つ．）

（3）g を単位元でない $Sz(q)$ の任意の元とすると，g の $Sz(q)$ における中心化群 $C_{Sz(g)}(g)$ は常にベキ零である（すなわち，$Sz(q)$ は (CN) 群である．）

（4）$Sz(q)$ の剰余空間 $Sz(q)/QK$ の上の自然な作用は二重可移であり，任意の異なった 3 点を固定する $Sz(q)$ の元は単位元に限る（すなわち，$Sz(q)$ は**ザッセンハウス群**である．）

$Sz(q)$ の生成元 $\{(\alpha,\beta),\ (k),\ \tau\}$ はすべて双 1 次形式

$$x_1y_4+x_2y_3+x_3y_2+x_4y_1$$

を不変にするので，$Sz(q)$ は 4 次のシンプレクティク（symplectic）群 $S_p(4,q)=B_2(q)$ の部分群となっている．$B_2(q)$ は q が 2 の奇数ベキのときに限って特別な自己同型 σ をもち，

$$Sz(q)=\{g\in B_2(q)\mid g^\sigma=g\}$$

となっているのである．それゆえ，$Sz(q)$ はリー理論の中から自然に構成されてもよかったが，歴史的には，鈴木通夫がザッセンハウス群の完全な分類の過程の中で，リー理論とは関係なく，有限群論的に発見したのである．これに関して，ファイトが「良い理論を持つより，良い数学者を持つほうがよい」とある高名なリー理論学者に言った（言ってやった）という話が残っている．発見そのものは群論的であったが，分類上は $Sz(q)$ もリー型の単純群の 1 つに数える方が一般的であり，${}^2B_2(q)$ と書かれる群と同一である．

複素数体 $\mathbb{C}$ の上に解析的に定義されたリー群を有限体の上にも一般的な手法で定義できることを数学者は発見した．それにより種々のリー型の有限単純群が生まれた．有限体の標数やベキ指数，また行列の大きさを変えることができるので，リー型の有限単純群はすべて無限系列の中に入る．

無限系列に入らない 26 個の**散在型単純群**が存在することが有限群論の最大の魅力である．26 個の中の 5 個，マシュー（E. L. Mathieu）群 $Mathieu_1$, $Mathieu_2$, $Mathieu_3$, $Mathieu_4$, $Mathieu_5$ は 1860 ～ 70 年頃にすでに発見されているのであるが，6 個目の $Janko_1$ は実にそれから 100 年あまり経た 1965 年に発見されている．そして残りの 20 個もそれに続くように発見されて，1974 年には有限単純群の発見の時代は終わり，分類の完成へとひたすら突き進むことになる．そして 1981 年に有限単純群の分類が完成するのである．（散在型単純群のすべては付録 1 として記す．）

位数最大の散在型単純群であるモンスターは有限単純群論が閉じた世界でないことを示してくれた．そのことを見るのが本書の目的である．モンスターばかりでなく，他の散在型単純群の研究が終わったわけではない．なによりもその存在が偶発的すぎる．なにかもっと深い理由があってよい．モンスターは本書を通じて $\mathbb{M}$ と書く．

荒っぽい言い方をすれば，散在型単純群はリー型の単純群の例外的な性質（「事件」と呼ぼう）に発生の理由があるようだ．リー型の単純群は標数が大きかったり，次元が大きくなると，「事件」は起こらなくなるが，それらが小さいときには，例えば，

$$PSL(2,7) \subset U_3(3) = G_2(2)' \subset Janko_2 \subset G_2(4) \subset Suzuki$$

のような単純群の鎖ができる．$Janko_2$, $Suzuki$ は付録 1 に示すように散在型単純群で，位数はそれぞれ，

$$|Janko_2| = 604,800,$$
$$|Suzuki| = 448,345,497,600.$$

リー型の単純群と散在型単純群はその発生過程がまったく異なるもののようにも見えるのだが，小さいリー型の単純群が持つ例外的な性質（**自己同型**, **シューア乗数**, **極大部分群**など）が散在的単純群の誕生の秘密を握っているとも思われる．しかし，そのことは今のところは経験的にわかるだけで，理論的に解明されているわけではない．26 個の散在型単純群の自然に生まれてくる土壌が発見されるのは 21 世紀の課題になるだろう．

第 2 章

群の表現

群はその任意の 2 元 a, b に対して積 ab がその群の中の元として定義された集合であり，さらに，単位元，逆元が存在し，結合律が成立している．どの元 a, b に対しても $c=ab$ となる元 c が群の中に定まっていれば群構造は決定されるのである．しかし，決定されているというのはあくまでそのような群が確定的に存在していることであって，目に見えるように存在しているわけではない．（抽象）群を少しでも目に見えるようにしたい．2 つの行列の積を計算するとなると，あまりにも機械的で時間がかかり面倒である．しかし，行列はよく目に見えるのである．例えば行列ならば，行列式，トレース（trace）などと群の構造に関することがある数値として表現される．

抽象群を行列からできた群としてとらえるのが表現論である．行列を考えるためには，その成分をどこからとるかがまず問題になる．可換環でもよいが，群論では，通常，行列成分は体からとる．しかも，その体は通常は複素数体 $\mathbb{C}$ である．

群から，ある行列のなす群への準同型写像を**群の表現**と言い，行列成分が複素数体の元であるとき，それを**通常表現**と呼び，行列成分が正標数の体の元であるとき，**モデュラー（modular）表現**と呼ぶ．ここでは主として通常表現を扱う．

抽象群を目に見えるようにするのが表現の出発点であったが，表現論そのものはそのような当初の目的に当てはまらない深さを持っている．しかし，その高度に発展した群の表現論を展開するのは本書の目的ではない．後で必要に

なる程度の表現論を述べるにとどめる．

2.1 指標の直交関係

有限群 G に対して異なる表現がいくつあるかがまず問題になろう．異なる表現と言っても**同値**なもの，いくつかの表現の**和**であるものを除いた**既約表現**の数を知りたい．

定理 有限群の既約表現の個数は共役類の個数に等しい． ∎

モンスター $\mathbb{M}$ は 194 個の共役類を持っているので，同じ数 194 個の既約表現がある．そのうちの 1 つは $\mathbb{M}$ のすべての元を数 1（1 行 1 列の行列と見て）に写す自明なものであるが，自明でない一番小さいものは 196883 次の既約表現である．196883×196883 の行列を持ってこなくてはモンスターを**忠実**（同型に）に行列群の中に埋め込むことはできないのである．そして，この 196883 という数が由緒ある数だったのである．そこからモンスターの世界が広がり，群の世界も広がる．

対称群 S_n の共役類は互いに共通部分のない巡回置換の積として，

$$1^{a_1}2^{a_2}\cdots n^{a_n}, \quad \sum_{i=1}^{n} ia_i = n$$

のように表わすことができる．それゆえ，S_n の共役類の個数は n の分割の数 $p(n)$ に等しい．共役類の個数と既約表現の個数が等しく，共役類は分割で記述できるのだから，既約表現も分割で記述できると都合がよい．それを実際可能にしたのが**ヤング**（A. Young）**の図形**である．対称群の表現論は実におもしろい．一般の群に対しては，共役類の集合と既約表現の集合には一対一の標準的な対応はつけられない．

2 つの既約表現の次元が異なれば，もちろんそれらは同一視できないが，同じ次元の場合は，

$$g \to \varphi(g) \in GL(n,\mathbb{C})$$

$$g \to \phi(g) \in GL(n,\mathbb{C})$$

を群 G の 2 つの（既約）表現とするとき，

$$X^{-1}\varphi(g)X=\phi(g)$$

がすべての $g\in G$ に対して成立するような $GL(n,\mathbb{C})$ の元 X が存在するとき，表現 φ,ϕ は**同値である**という．

φ と ϕ が同値であれば，すべての $g\in G$ に対して $\varphi(g)$ と $\phi(g)$ の固有多項式は等しい．その等しい固有多項式を

$$P_g(X)=X^n-a_1(g)X^{n-1}+\cdots+(-1)^n a_n(g)$$

と書くと，$a_1(g)$ は $\varphi(g)$ のトレースであり，$a_n(g)$ は $\varphi(g)$ の行列式である．すなわち，

$$a_1(g)=\mathrm{Tr}(\varphi(g))=\mathrm{Tr}(\phi(g))$$
$$a_n(g)=\det(\varphi(g))=\det(\phi(g))$$

φ と ϕ が同値ならば，$a_1(g), a_n(g)$ のみならず，すべての $a_i(g)$ が φ で計算しても ϕ で計算しても同じである．そのことが必要条件でもあったとすると，群の表現論も複雑であったであろうが，次の簡明な定理が成立する．

定理 G の 2 つの(既約)表現 φ,ϕ が同値になる必要十分条件は，

$$\mathrm{Tr}(\varphi(g))=\mathrm{Tr}(\phi(g))$$

がすべての $g\in G$ について成立することである． ∎

G から $\mathbb{C}$ へのトレース関数 $\mathrm{Tr}(g)=a_1(g)$ を与えれば，すべての関数 $a_i(g)$, $1\leqq i\leqq n$ が自動的に決まってしまうのである．群というものが完成された代数構造であることを物語っていると思われる．トレース $\mathrm{Tr}(g)$ はこのように重要な関数なので，**群の指標**と呼ばれる．定理の証明は次の指標の直交関係を使えばよい．ただし，g, g' は G の共役類の決められた代表元とする．

定理(指標の直交関係式) $\{\chi_i\}_{i=1}^{d}$ を有限群 G の既約指標全体の集合とするとき，次の等式が成立する．

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_i(g)\chi_j(g^{-1})=\langle\chi_i,\chi_j\rangle=\delta_{ij}$$
$$\frac{1}{|C_G(g)|}\sum_{i=1}^{d}\chi_i(g)\chi_i(g'^{-1})=\delta_{gg'}$$ ∎

定理の上の式の真ん中の等式は，指標間の内積を定義している．これらの指標の直交関係式は，次の行列成分の関係式から得られる．

定理（**行列成分の直交関係式**） φ, ϕ を群 G の既約表現とし $a_{ij}(g), a'_{kl}(g)$ をそれぞれ行列 $\varphi(g), \phi(g)$ の行列成分としよう．

（a）φ と ϕ が同値でないときは，

$$\sum_{g\in G} a_{ij}(g)a'_{kl}(g^{-1})=0$$

（b）同じ表現 φ の中では，

$$\sum_{g\in G} a_{ij}(g)a_{kl}(g^{-1})=\delta_{jk}\delta_{il}\frac{|G|}{\deg\varphi}$$ ▮

指標は表現行列 $\varphi(g)$ の対角成分 $a_{ii}(g)$ の和であったから，行列成分の直交関係式から指標の直交関係式が導かれるのは納得がいくだろう．行列成分の関係式を得るのは，V_φ, V_ϕ を表現 φ, ϕ の表現空間とするとき，

$$X\in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_\varphi, V_\phi)$$

に対して

$$T(X)=\sum_{g\in G}\varphi(g)X\phi(g^{-1})$$

とおくと，すべての $g\in G$ に対して

$$\varphi(g)T(X)=T(X)\phi(g)$$

が成立する．すなわち，

$$T(X)\in \mathrm{Hom}_G(V_\varphi, V_\phi)$$

となる．そこで，行列 X をうまく選び，次のシューアの補題を使えば望んだ結果が得られる．

シューアの補題 V, V' を G の既約な表現空間とするとき，

（a）V と V' が同値でなければ，$\mathrm{Hom}_G(V,V')=0$.

（b）V と V' が同値であれば，$\mathrm{Hom}_G(V,V')\cong\mathbb{C}$. ▮

第1章においても，群論の基本定理としてはシロー部分群に関するものしか述べなかった．表現論も直交関係式以外のものは省略して，以下の節では後章で必要なことのみ述べる．

2.2 クリフォードの理論

G を有限単純群とし，z を G のシロー 2 部分群の中心に属する位数 2 の元とする．z の G における中心化群 $C=C_G(z)$ の構造は群 G 全体の構造をほとんど決定する．C の構造を知られている単純群について調べてみると，リー型の単純群の中にも散在型単純群の中にも次のような設定になっている例が数多くある．すなわち，

(1) $C \triangleright Q$, Q はエクストラスペシャル (extra special) 群,

(2) $C_C(Q)=\langle z\rangle$,

(3) C/Q は単純群に‘近い’群.

第3章で詳しく述べるが，G として，モンスター単純群 $\mathbb{M}$ を例にとれば，Q は位数 2^{25} で $C/Q\cong Conway_1$ となっている．$G=Thompson$ とすれば，Q の位数は 2^9 で，$C/Q\cong A_9$ である．その他の散在型単純群でも C/Q に現われる単純成分は，あってもただ1つであるが，$G=Harada$ は唯一の例外で，$C/Q\cong A_5 \wr Z_2$，すなわち $[C/Q,C/Q]\cong A_5\times A_5$ となり，単純成分が2つ入っている．

Q は エクストラスペシャル 2 群であったが，その位数を 2^{1+2n} とすると，Q は 2^{2n} 個の1次の指標を持つことは，$Q/[Q,Q]$ が位数 2^{2n} の可換群になることから明白だが，φ をそれら以外の Q の既約指標とすると，φ は 2^n 次の忠実な指標となり，これで Q の指標は尽きる．φ はその唯一性により，C における共役はすべて φ に一致する．すなわち，$h\in C$ に対して共役指標 φ^h を，

$$\varphi^h(g)=\varphi(h^{-1}gh), \quad g\in Q$$

と定義すると，

$$\varphi^h = \varphi$$

となる．すなわち，φ は C 不変となる．とすると，φ は Q の指標であったが，C まで持ち上げることができても不思議ではない．また，φ を C まで持ち上げることができない場合でも，C の指標 χ で Q への制限 $\chi|_Q$ が φ をその成分として含んでいるものは一体どのように書けるだろうか．そのようなことを解明したのが**クリフォード**（A. H. Clifford）**の定理**である．

一般論にもどり，次のことを仮定する．

（1）G は有限群，

（2）N は G の正規部分群，

（3）φ は N の既約指標，

（4）χ は G の既約指標で N への制限 $\chi|_N$ は φ を既約成分として含んでいる．（$\chi|_N \ni \varphi$ とか $\chi \ni \varphi$ と書くこともある．）

χ は G の指標であるからもちろん G で不変である．すなわち，

$$\chi = \chi^g \ni \varphi^g$$

φ の $\chi|_N$ における重複度を m とすれば，φ の G の任意の共役 φ^g の $\chi|_N$ における重複度も m となる．集合

$$I_\varphi = \{g \in G \mid \varphi = \varphi^g\}$$

は N を含む G の部分群で，φ の**惰性**（inertia）**群**と呼ばれる．$\{g_1, \cdots, g_h\}$ を剰余空間 G/I_φ の完全代表系[*1)]とすると，$\varphi^{g_1}, \cdots, \varphi^{g_h}$ はすべて異なり，$\chi|_N$ には重複度を除けばそれ以外の既約成分はない．まとめると，

定理　$\chi|_N = m(\varphi^{g_1} + \cdots + \varphi^{g_h}),\ h = [G : I_\varphi]$ ∎

次に条件（3）をさらに強く

（3′）φ は N の G で不変な既約指標．

としよう．（1），（2），（3′），（4）の仮定のもとでは，

$$\chi|_N = m\varphi$$

---

*1)　ここでは $G = \bigcup_{i=1}^{h} I_\varphi g_i$ という直和分解を考えている．

となる．このような χ を記述するために射影表現を定義しよう．以下，K は（任意標数の）代数的閉体とする．

定義 群 G から $GL(n,K)$ への写像 P が，

$$P(gg')=a(g,g')P(g)P(g'),\quad a(g,g')\in K$$

を満たしているとき，P を G の**射影表現**と言う． ∎

K の元 $a(g,g')$ があるので，$P:G\to GL(n,K)$ は準同型ではない．よって，P は通常の表現ではない．π を標準的な上への準同型とするとき，G から $PGL(n,K)$ への写像

$$\pi\circ P:G\xrightarrow{P}GL(n,K)\xrightarrow{\pi}PGL(n,K)$$

は準同型である．P はスカラー行列を除いて準同型なのである．G の 2 つの射影表現 P_1, P_2 は，

$$T^{-1}P_1(g)T=c(g)P_2(g)$$

となる可逆行列 T と $c(g)\in K$ が存在するとき同値という．

さて，G を前に述べた設定（1），（2），（3′），（4）を満足する群としよう．V を G の指標 χ の表現空間とすると，$\chi|_N=m\varphi$ により，

$$V|_N=W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_m$$

となる．V の基底は W_i, $1\leqq i\leqq m$ の基底の和集合になる．それらの基底を適当に選べば，元 $n\in N$ の V の上の表現行列 $C(n)$ は，

$$C(n)=\begin{pmatrix} F(n) & & & & \\ & F(n) & & \text{\Large 0} & \\ & & \ddots & & \\ & \text{\Large 0} & & \ddots & \\ & & & & F(n)\end{pmatrix}$$

のように書ける．また，一般の G の元 g に対しては，

$$C(g)=\begin{pmatrix} F_{11}(g) & F_{12}(g) & \cdot & \cdot \\ F_{21}(g) & F_{22}(g) & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & F_{mm}(g) \end{pmatrix}$$

のように書ける．C は準同型だから，

$$C(n)C(g)=C(g)C(g^{-1}ng)$$

が成り立つ．F_{ij} を使って書くと，

$$F(n)F_{ij}(g)=F_{ij}(g)F(g^{-1}ng)=F_{ij}(g)F^g(n)$$

である．仮定によって，$\varphi=\varphi^g$，すなわち，F と F^g は N の同値な行列表現である．よって，可逆行列 $P(g)$ が存在して，

$$F(n)P(g)=P(g)F^g(n)$$

となる．

この P が G の射影表現を与えていることを示そう．

$$\begin{aligned} F(n)P(g)P(g')P(gg')^{-1} &= P(g)F^g(n)P(g')P(gg')^{-1} \\ &= P(g)P(g')F^{gg'}(n)P(gg')^{-1}=P(g)P(g')P(gg')^{-1}F(n) \end{aligned}$$

となるので

$$P(g)P(g')P(gg')^{-1}\in \mathrm{Hom}_N(W_1,W_1)$$

となり，シューアの補題により，

$$P(g)P(g')=a(g,g')P(gg'),\quad a(g,g')\in K$$

を得て，P が G の射影表現となることが示された．N の元 n に対しては，明らかに，

$$P(n)=F(n)$$

としてよい．また，

$$F(n)F_{ij}(g)P(g)^{-1}=F_{ij}(g)F^g(n)P(g)^{-1}=F_{ij}(g)P(g)^{-1}F(n)$$

となる．そこで，$F_{ij}(g)P(g)^{-1}$ を $GL(W_1)$ の元とみなすと，

$$F_{ij}(g)P(g)^{-1}\in \mathrm{Hom}_N(W_1,W_1)$$

となる．W_1 は N の既約表現を与えているので，

$$F_{ij}(g)P(g)^{-1}=a_{ij}(g)I,\quad a_{ij}(g)\in K$$

となる．I は $GL(W_1)$ の単位行列である．

$$P_1(g)=(a_{ij}(g))$$

と定義すれば，

$$C(g)=(F_{ij}(g))=P_1(g)\otimes P(g)$$

が成立している．

$C:G\to GL(V)$ は準同型であることにより

$$P_1(gg')=a(g,g')^{-1}P_1(g)P_1(g')$$

が従い，P_1 も G の射影表現を与える．N の元 n に対しては $P(n)=F(n)$ であったから，

$$P_1(n)\otimes P(n)=C(n)=\begin{pmatrix} F(n) & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot & \\ & & & & F(n)\end{pmatrix}=I\otimes F(n)$$
$$=I\otimes P(n)$$

より，

$$P_1(n)=I$$

が従う．ゆえに，P_1 は G/N の射影表現である．以上をまとめると，$P=P_2$ とおいて，次のクリフォードの定理が得られる．

クリフォードの定理　K を(任意の標数の)代数的閉体とし，V を既約な $K[G]$ 加群とする．さらに，N を G の正規部分群とし，$V|_N$ は m 個の同型な $K[N]$ 既約加群 W の直和であるとする．R を G の V の上の表現とすると，

$$R(g)=P_1(g)\otimes P_2(g)$$

と書ける．ここで，P_1, P_2 は G の既約な射影表現であり，さらに，

(a) $\deg P_1=m$, $\ker P_1\supset N$,

(b) $\deg P_2=\dim W$, P_2 は N 上では既約な(非射影)表現，

が成立する． ∎

クリフォードの定理によれば，有限群 G の正規部分群 N の G 不変な既約指標 φ は，常に G の射影表現(の指標)にまでは持ち上げることができる．なぜならば，φ^G を φ の G への誘導指標とするとき，φ^G の既約成分 χ で $\chi|_N\ni\varphi$ となっているものがあるので χ に対して定理を適用すればよい．ゆえに，G/N の射影表現がすべて通常の表現に同値のとき(すなわち，真の意味の射影表現を持たないとき)は，φ は G の通常の表現の指標に持ち上げることができる．

2.3　対称積・外積(交代積)

V を体 K 上のベクトル空間とするとき，

$$T(V)=K\oplus V\oplus(V\otimes V)\oplus(V\otimes V\otimes V)\oplus\cdots$$

とおいて標準的に**テンソル積代数** $T(V)$ ができる．$T(V)$ は定義により結合的である．$T^n(V)=V\otimes\cdots\otimes V$ (V の n 個のテンソル積)と書くと，$T^0(V)=K$ で，

$$T(V)=\coprod_{n\geqq 0}T^n(V)$$

である．$x\otimes y$ などは xy と書いてもよい．集合

$$\{xy-yx \mid x, y \in T(V)\}$$

で生成された $T(V)$ のイデアルを $I(V)$ と書けば，剰余代数として**対称積代数**

$$S(V)=T(V)/I(V)$$

ができる．$I(V)$ は，集合

$$\{xy-yx \mid x, y \in V=T^1(V)=V\}$$

でも生成されていて，

$$I(V)=\coprod_{n\geqq 0} I^n(V), \quad I^n(V)\subset T^n(V), \quad I^0(V)=I^1(V)=\{0\}$$

と直和に書けるから，

$$S(V)=\coprod_{n\geqq 0} S^n(V), \quad S^n(V)\cong T^n(V)/I^n(V)$$

となっている．

テンソル代数はリー代数の展開環を作るときなどに使われ，対称積代数は頂点作用素代数の構成などにも使われる．

$S^2(V), S^3(V)$ などは，有限群 G の指標表を書きあげるのに便利なことがある．χ を G の既約指標とし，V をその表現空間としよう．

$$\{v_i\}_{i=1}^d$$

を V の基底とすれば，

$$\{v_i\otimes v_i\}_{1\leqq i\leqq d} \cup \{v_i\otimes v_j\}_{1\leqq i<j\leqq n}$$

が $S^2(V)$ の基底となる．ゆえに，$g\in G$ を 1 つ決め，$\{v_i\}_{i=1}^d$ を g の固有ベクトルに選び，$\{\zeta_i\}_{i=1}^d$ を対応する固有値とすると，

$$\chi(g)=\sum_{i=1}^d \zeta_i$$

であり，$S^2(V)$ の上での g の指標の値は，

$$\sum_{i=1}^{d}\zeta_i^2+\sum_{1\leqq i<j\leqq n}\zeta_i\zeta_j=\frac{\left(\sum_{i=1}^{d}\zeta_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{d}\zeta_i^2\right)}{2}$$

となる．ゆえに，$S^2(V)$ の指標 $S^2(\chi)$ の g での値は，

$$\frac{\chi^2(g)+\chi(g^2)}{2}$$

と計算される．

定理 χ を有限群 G の既約指標とし，$S^2(\chi)$ を χ の 2 次の対称積とすると，

（a）$S^2(\chi)(g)=\dfrac{\chi^2(g)+\chi(g^2)}{2}$.

（b）$\langle S^2(\chi),1\rangle=1$ となるのは，χ が実表現の指標になるときに限る．その他のときは，$\langle S^2(\chi),1\rangle=0$ となる． ∎

定理の命題（b）の証明をしてみよう．

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi^2(g)=\langle\chi^2,1\rangle=\langle\chi,\overline{\chi}\rangle=1 \text{ または } 0$$

であるから，（b）の主張は

$$\mu(\chi)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g^2)=\begin{cases}1 & (\chi \text{ が実表現の指標のとき})\\ -1 & (\chi=\overline{\chi} \text{ で実表現の指標でないとき})\\ 0 & (\chi\neq\overline{\chi} \text{ のとき})\end{cases}$$

と同値である．χ は $R: g\rightarrow R(g)=(r_{ij}(g))$ という行列表現で与えられた指標としよう．$\chi(g^2)$ は行列 $R(g)R(g)$ のトレースであり，$R(g)$ はユニタリー行列としてよいから，

$$R(g)R(g)=R(g)^t\overline{R(g)^{-1}}=R(g)^t\overline{R(g^{-1})}$$

であり，

$$\mu(\chi)=\frac{1}{|G|}\sum_{i,j}\sum_{g\in G}r_{ij}(g)\overline{r_{ij}(g^{-1})}$$

となる．$\chi\neq\overline{\chi}$ のときは，行列成分の直交関係式により，

$$\mu(\chi)=0$$

となる．以後，$\chi=\overline{\chi}$ としよう．χ が実表現の指標ならば，明らかに

$$\mu(\chi)=\frac{1}{|G|}\sum_{i,j}\delta_{ij}\delta_{ji}\frac{|G|}{\deg\chi}=1$$

となる．最後に，$\chi=\overline{\chi}$ であるが実表現に同値にならない場合を考えよう．実は，この場合だけが証明らしいことを必要とする．まず，補題として次のことを証明なしに述べよう．

補題　$g\to R(g)$ を有限群 G の複素行列表現，χ をその指標とし，$\chi=\overline{\chi}$ を仮定しよう．$\overline{R}$ を R の複素共役表現とすると，仮定により，

$$\overline{R}(g)=U^{-1}R(g)U$$

となるユニタリー行列 U が存在する．このとき，${}^tU=\pm U$ となり，${}^tU=U$ となるのは R が実表現のときに限る．　∎

命題（b）の証明にもどると，我々に残された場合は，${}^tU=-U$ となっている．それゆえ，$U=(u_{ij})$ のとき，${}^t\overline{U}U=1$ であることを使って，

$$\overline{r_{ij}(g^{-1})}=-\sum_{s,t}\overline{u}_{is}r_{st}(g^{-1})u_{tj},$$

$$\mu(\chi)=-\frac{1}{\chi(1)}\sum_{i}\sum_{j}\overline{u}_{ij}u_{ij}=-\frac{1}{\chi(1)}\sum_{i=1}^{\chi(1)}1=-1$$

と求める式が得られる．

G の各元での χ の値がわかっていれば，その **2 次対称積** $S^2(\chi)$ の値も計算できる．指標の内積 $\langle S^2(\chi),S^2(\chi)\rangle$ が小さい値のとき，$S^2(\chi)$ を既約指標の和に分解すれば，新しい既約指標が得られるのである．例えば，G をリーチ（J. Leech）格子の自己同型群としよう．$G=.O$ と書かれる群であり，$Z(G)\cong Z_2$ で $G/Z(G)$ は散在型単純群 $Conway_1$ に同型である．G は，リーチ格子 Λ の自己同型群としての 24 次の実表現を持つ．χ をその指標としよう．G は 167 個の共役類を持つが，各々の共役類での χ の値の計算は困難ではない．

$$\langle\chi^2,\chi^2\rangle=3$$
$$\langle\chi^2,S^2(\chi)\rangle=2$$
$$\langle S^2(\chi),1\rangle=1$$

などの計算も容易にできて，

$$S^2(\chi)=1+\chi_2$$
$$\chi^2=1+\chi_2+\chi_3$$

のように，G の既約指標の和に分解できる．それぞれの次数は $\chi_2(1)=299$, $\chi_3(1)=276$ であり，2 つの新しい既約指標を得たのである．χ_2, χ_3 はともに $Z(G)$ の上で自明であるから，χ_2，χ_3 は $Conway_1$ の既約指標である．

3 次以上の対称積も使われることがある．V の基底を

$$\{v_i\}_{i=1}^d$$

とするとき，$S^3(V)$ の基底は，

$$\{v_i\otimes v_i\otimes v_i\}_{1\leqq i\leqq d}\cup\{v_i\otimes v_i\otimes v_j\}_{1\leqq i<j\leqq d}\cup\{v_i\otimes v_j\otimes v_k\}_{1\leqq i<j<k\leqq d}$$

となるので

定理　有限群 G の既約指標 χ の 3 次対称積の指標は，

$$S^3(\chi)(g)=\frac{1}{6}\{\chi^3(g)+3\chi(g)\chi(g^2)+2\chi(g^3)\}$$

で与えられる．∎

次に $T(V)$ の部分集合

$$\{xy+yx\,|\,x,y\in T(V)\}$$

で生成される $T(V)$ のイデアルを $J(V)$ とおく．$J(V)$ による $T(V)$ の剰余代数を

$$\Lambda(V)=A(V)=T(V)/J(V)$$

と書き，**外積代数**または，**交代積代数**という．対称積代数の定義に使ったイデアル $I(V)$ 同様，$J(V)$ も

$$\{xy+yx\,|\,x,y\in T^1(V)=V\}$$

でも生成されていて

$$J(V)=\coprod_{n\geqq 0} J^n(V), \quad J^n(V)\subset T^n(V), \quad J^0(V)=J^1(V)=\{0\}$$

と書けるので,

$$\Lambda(V)=\coprod_{n\geqq 0} \Lambda^n(V), \quad \Lambda^n(V)\subset T^n(V)/J^n(V)$$

と書ける．V が有限次元のときは，その基底を $\{v_i\}_{i=1}^d$ とすると，$\Lambda^n(V)$ の基底は

$$\{v_{i_1}v_{i_2}\cdots v_{i_n}\}_{1\leqq i_1<\cdots<i_n\leqq d}$$

である．特に，$\Lambda^d(V)$ は 1 次元で，$k>d$ のときは $\Lambda^k(V)=0$ である．

2.4　アダムズ作用素

φ を有限群 G の指標とし，m をある自然数とするとき,

$$\varphi_m : g\to \varphi(g^m)$$

によって G から $\mathbb{C}$ への関数 φ_m を定義しよう．φ_m は類関数であるが一般には指標とはならない．G を単純群として，$m=2$ とすれば，φ_2 は位数 2 の元の上では単位元と同じ値をとる．φ_2 が指標なら，単位指標の和となるしかないが，奇数位数の元 g での $\varphi(g^2)$ を考えれば矛盾が出る．しかし，φ_m は一般指標にはなる．この節ではそのことを記述する．

A を G 加群とするとき，その r 次の外積空間 $\Lambda^r(A)$ については前節で述べた．A の上の G の指標を φ_A とし，$g\in G$ のとき,

$$\varphi_A(g)=\xi_1+\cdots+\xi_s, \quad s=\deg\varphi_A$$

とすれば，$\Lambda^r(A)$ の上の G の指標 $\varphi_A^{(r)}$ の g における値は

$$\varphi_A^{(r)}(g)=\sum_{1\leqq i_1<i_2<\cdots<i_r\leqq s}\xi_{i_1}\cdots\xi_{i_r}$$

である．すなわち，$\varphi_A^{(r)}(g)$ は $\{\xi_1,\cdots,\xi_s\}$ の r 次基本対称式である．上に φ_m を定義したように,

$$\varphi_m(A)(g) = \varphi_A(g^m)$$

により類関数 $\varphi_m(A)$ を定義しよう．$\varphi_m(A)$ が一般指標であることを証明したい．そのためには，$\varphi_m(A)$ が $\varphi_A^{(r)}$, $1 \leqq r \leqq s$, と $\varphi_k(A)$, $1 \leqq k \leqq m-1$, の整係数多項式で書けることを言えば，m に関する帰納法により，$\varphi_m(A)$ も G の一般指標であることが言える．

R を G の一般指標環とする．すなわち $R = \mathrm{ch}(\mathrm{G})$ である．

$$R[[t]]$$

という G の一般指標が係数で t を不定元とする形式的ベキ級環を考える．x を $R[[t]]$ の元で定数部分が 1 となるものとしよう．すなわち，$x-1 \in tR[[t]]$ とする．このとき，級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}$$

は，$\mathbb{Q} \otimes R[[t]]$ の 1 つの元を定める．

$$\log x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n} \in \mathbb{Q} \otimes R[[t]]$$

とおこう．実数 a に対して，等式

$$\log a = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(a-1)^n}{n}$$

は右辺が収束する限り成立しているので，

$$\log xy = \log x + \log y$$

$$\frac{d}{dt} \log x = x^{-1} \frac{dx}{dt}$$

等の式が $x-1$, $y-1 \in tR[[t]]$ のとき成立していることを示すのは容易である．

$$F_A(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \varphi_A^{(r)} t^r \in R[[t]]$$

と定義する．（r が大きいときは $\varphi_A^{(r)} = 0$ なので $F_A(t)$ は多項式である．）なお，$\varphi_A^{(0)} = 1$ とおき，それを G の単位表現で数 1 とも同一視する．すなわち，$F_A(t) - 1 \in tR[[t]]$ である．B を G の加群とするとき，外積空間の関係式

$$\Lambda^r(A\oplus B)=\bigoplus_{i+j=r}(\Lambda^i(A)\otimes\Lambda^i(B))$$

により，

$$\varphi_{A+B}^{(r)}=\sum_{i+j=r}\varphi_A^{(i)}\cdot\varphi_B^{(j)}$$

が得られ，

$$F_{A+B}(t)=F_A(t)F_B(t)$$

も成立する．

$$F_{A-B}(t)=F_A(t)/F_B(t)$$

と定義すれば写像

$$X\longrightarrow F_X(t)$$

は加法群 ch(G) から群 $\{F_X(t)\}_{X\in\mathrm{ch(G)}}$ への準同型を与えている．

$$-t\frac{d}{dt}(\log F_A(-t))=\sum_{m=1}^{\infty}\varphi_m(A)t^m\in\mathbb{Q}\otimes R[[t]]$$

により，各自然数 m に対して，$\varphi_m(A)\in\mathbb{Q}\otimes\mathrm{ch(G)}$ を定義する（ $\varphi_m(A)$ はすでに定義してあるのだが，結局同じものになる）．左辺は，

$$\frac{-t\dfrac{d}{dt}(F_A(-t))}{F_A(-t)}$$

に等しく

$$F_A(-t)=1-\varphi_A^{(1)}t+\varphi_A^{(2)}t^2-\cdots$$

を代入すれば，$\varphi_m(A)$ は m の小さい方から次々に解くことができて，

$$\begin{aligned}
\varphi_1(A)&=\varphi_A^{(1)}=\varphi_A\\
\varphi_2(A)&=\varphi_A^{(1)}\varphi_1(A)-2\varphi_A^{(2)}\\
&\ \ \vdots\\
\varphi_m(A)&=\sum_{i=1}^{m-1}(-1)^{i-1}\varphi_A^{(i)}\varphi_{m-i}(A)+(-1)^{m-1}m\varphi_A^{(m)}
\end{aligned}$$

となり，$\varphi_m(A)\in \mathrm{ch(G)}$ であることが判明する．

次に，一般指標とわかった $\varphi_m(A)$ の G の元 g における値を計算しよう．まず，

$$\varphi_m(A+B)=\varphi_m(A)+\varphi_m(B)$$

が定義からただちに従う．$\varphi_A^{(r)}$ の g における値が $\{\xi_1,\cdots,\xi_s\}$ の上の r 次の基本対称式であったから，

$$F_A(t)(g)=\sum_{m=0}^{\infty}\varphi_A^{(m)}(g)t^m=\prod_{i=1}^{s}(1+\xi_i t),\quad s=\deg\varphi_A$$

となる．$m>s$ のとき $\varphi_A^{(m)}=0$ に注意しよう．

ゆえに，

$$\log F_A(-t)(g)=\sum_{i=1}^{s}\log(1-\xi_i t)$$
$$\sum_{m=1}^{\infty}\varphi_m(A)(g)t^m=\sum_{i=1}^{s}\frac{\xi_i t}{1-\xi_i t}=\sum_{i=1}^{s}(\sum_{m=1}^{\infty}\xi_i^m t^m)$$

となり，

$$\varphi_m(A)(g)=\sum_{i=1}^{s}\xi_i^m$$

が得られる．右辺は $\varphi_A(g^m)$ に等しいので，結局，次の定理が証明されたことになる．定理の後半部分も上の証明を振り返って見れば容易にわかる．

定理 G を有限群，A を G の一般加群（virtual module），ϕ_A をその指標（virtual character）としよう．各自然数 m に対して，G の一般加群 $\phi_m(A)$ でその指標の G の元 g における値が $\phi_A(g^m)$ となっているものが存在する．さらに（B も G の一般加群とするとき），

$$\phi_m(A\otimes B)=\phi_m(A)\cdot\phi_m(B)$$
$$\phi_m(\phi_n(A))=\phi_{mn}(A)$$

が成立する． ∎

定理で述べた $\mathrm{ch(G)}$ から $\mathrm{ch(G)}$ への写像 ϕ_m を，**アダムズ**（J. F. Adams）**作用素**と呼ぶ．実は，アダムズ作用素の証明の本質的な部分はすでに古くから知られていることである．念のため以下それを述べよう．

$X=\{x_1,\cdots,x_n\}$ を n 個の変数からなる集合で，X の上の基本対称式 $\{s_i(X):i=1,2,\cdots\}$ を以下のものとする．

$$\begin{aligned} s_1(X) &= x_1+x_2+\cdots+x_n \\ s_2(X) &= \sum_{1\leqq i<j\leqq n} x_i x_j \\ &\vdots \\ s_n(X) &= x_1 x_2\cdots x_n \end{aligned}$$

同様に，変数 $\{x_i\}$ のベキの和を次のように定義する．

$$p_j(X)=x_1^j+\cdots+x_n^j,\quad j=1,2,\cdots$$

集合 $\{s_i(X)\}$ と $\{p_j(X)\}$ を結びつけているニュートンの恒等式と呼ばれているものを導き出そう．t を変数として，

$$f(t)=\prod_{i=1}^{n}(1+tx_i)=1+s_1t+s_2t^2+\cdots+s_nt^n$$

とおこう．$s_i(X)$ は簡単のため s_i と記した．同様に，$p_i(X)$ も p_i と書くと，

$$\begin{aligned} \frac{f'(t)}{f(t)} &= \frac{d}{dt}\log f(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{1+tx_i} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}(-1)^k x_i^{k+1}t^k=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k p_{k+1}t^k \end{aligned}$$

が形式的ベキ級数の等式として得られる．ゆえに，

$$f'(t)=f(t)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k p_{k+1}t^k$$

となり

$$s_1+2s_2t+\cdots+ns_nt^{n-1}=\{1+s_1t+\cdots+s_nt^n\}\{p_1-p_2t+p_3t^2-\cdots\}$$

を得る．両辺の t のベキの係数を比較すれば次のニュートンの恒等式が得られる．

$$\begin{aligned} &p_1=s_1 \\ &p_2=s_1p_1-2s_2 \\ &p_3=s_1p_2-s_2p_1+3s_3 \\ &\quad\vdots \\ &p_{k+1}=s_1p_k-s_2p_{k-1}+\cdots+(-1)^{k-1}s_kp_1+(-1)^k(k+1)s_{k+1} \end{aligned}$$

最後の等式は，$m>n$ のとき $s_m(X)=0$ とおけばすべての $k \geqq 1$ について成立する．先に述べたアダムズ作用素はニュートンの恒等式が表現の間で成立していることを示すものである．

第 3 章

モンスター

有限単純群に関する成書はいくつかすでにある.「群の広がり」という観点からは，位数最大の散在型単純群であるモンスター $\mathbb{M}$ が最も興味のある単純群であると思われる．しかし，単純群一般の成書では，仮に，散在型単純群に話を限るとしても，モンスターにはあまり紙数を割いていない．そこでこの章では，モンスターを主として記述することにする．他の単純群に関してはモンスターを記述するのに必要な程度にとどめる.

3.1 モンスターの位数

「モンスター $\mathbb{M}$ は単純群 G で位数 2 の元 z を含み，その中心化群 $C_G(z)$ が位数 2^{25} のエクストラスペシャル (extraspecial) **群 Q の散在型単純群 $Conway_1$ による拡大となっている」**という条件で構造がただ 1 つに決定される群である.

$\mathbb{M}$ の位数は

$$2^{46}\cdot 3^{20}\cdot 5^{9}\cdot 7^{6}\cdot 11^{2}\cdot 13^{3}\cdot 17\cdot 19\cdot 23\cdot 29\cdot 31\cdot 41\cdot 47\cdot 59\cdot 71$$

であることが最終的にわかる．素数 $p=2,3,5,\cdots$ などのベキ指数 $46,20,9,\cdots$ などと，どのようにして決まっていくかを以下述べる．存在のはっきりしていない群は G として議論を進めるべきであろうが，モンスターは 1973 年に発見され，1970 年代の終わりから 1980 年の初めにかけて構成も終わっているので，その発見・構成の跡をたどるという意味で G は $\mathbb{M}$ と書くことにする.

上の条件で与えられた $C_{\mathbb{M}}(z)$ の位数は，

$$2^{46}\cdot 3^9\cdot 5^4\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13\cdot 23$$

である．$\mathbb{M}$ は単純群であり，$C_{\mathbb{M}}(z)$ はそうでないから，当然 $\mathbb{M}>C_{\mathbb{M}}(z)$ である．$C_{\mathbb{M}}(z)$ の中心の位数は 2 であり，z で生成されているから z は $\mathbb{M}$ のシロー 2 部分群の中心に属する．それゆえ，$\mathbb{M}$ の位数のうち 2 のベキの部分 $|\mathbb{M}|_2$ は 2^{46} である．

一般に単純群 G を特徴づけるときも，また新単純群を発見するときも，位数 2 の元 z の中心化群 $C_G(z)$ を与えることが多い．それは G の構造が $C_G(z)$ を与えることによって有限個に定まってしまうからである．しかも通常ただ 1 つと期待できる．z として G のシロー 2 部分群の中心に必ずしも入っていない元を与えることもあるが，それは少ない．それゆえ $|G|_2$ は通常の場合は，上記のモンスターの場合のように，初めから定まっているのである．

他の素数 p に対する $|\mathbb{M}|_p$ はどのようにして決めていくのであろうか．上のモンスターの $\mathbb{M}$ を考えて $p=3$ としよう．$C_{\mathbb{M}}(z)/Q\cong Conway_1$ であるから $C_{\mathbb{M}}(z)$ には位数 3 の元 σ で $Conway_1$ における中心化群が $\langle\sigma\rangle$ の（散在型単純群の 1 つの）$Suzuki$ による拡大になっているものが存在する．しかもこの σ は Q の上では $\langle z\rangle$ としか可換にならない．このようなことはリーチ格子の上での σ の作用からわかることである．まとめると，

$$Z(C_{\mathbb{M}}(z,\sigma))=\langle z,\sigma\rangle$$
$$C_{\mathbb{M}}(z,\sigma)/\langle z,\sigma\rangle\cong Suzuki$$

となる．

$H=C_{\mathbb{M}}(\sigma)$ とおこう．$C_H(z)=C_{\mathbb{M}}(z,\sigma)$ の構造はほぼ完全にわかっている．最終的には $C_{\mathbb{M}}(z,\sigma)$ は $6Suzuki$ と記述される位数 6 の巡回群の $Suzuki$ による不分岐中心拡大となっているのだが，今はそこまできっちりとわかっているわけではない．$C=C_{\mathbb{M}}(z)$ の構造もただ 1 つとして与えられているわけではない．単純群 $\mathbb{M}$ の中に埋め込められた中心化群，$C=C_{\mathbb{M}}(z), H=C_{\mathbb{M}}(\sigma)$ として構造がただ 1 つに定まっていくのである．

さて，$H=C_{\mathbb{M}}(\sigma)$ の構造をもう少し調べよう．H の奇数位の正規部分群の最大のもの $O(H)$ の構造が問題となる．$C_H(z)$ の構造から z は $O(H)/\langle\sigma\rangle$

の上に固定点を持たない．z は $O(H)/\langle\sigma\rangle$ の元のすべてを逆元に移す作用をし，$O(H)/\langle\sigma\rangle$ は可換群となる．ただし，$O(H)$ の大きさはまったく不明である．$O(H)$ は最終的には 3^{1+12} と書かれる位数 3^{13} のエクストラスペシャル群となるのでそれに近づく努力を少ししてみよう．$O(H)$ は大きさを決めるためには，z ばかりでなく他の位数 2 の元の $O(H)$ における作用を知る必要がある．t を $C_H(z)$ の z と異なる位数 2 の元としよう．部分群 $\langle z,t\rangle$ は位数 4 で，z, zt, t がその位数 2 の元のすべてである．

$$O(H)=C_{O(H)}(zt)C_{O(H)}(t)\langle\sigma\rangle$$

が成立することは容易にわかる．それゆえ，$C_{\mathbb{M}}(t)$ と $C_{\mathbb{M}}(tz)$ の構造がわかっていれば $O(H)$ の構造にも制約が課せられることになる．

t, tz ともに z に G の中で共役になるようにできればさらに好都合である．そのようなことを調べるためには，次の**グラウバーマン**（G. Glauberman）**の定理**が便利である．

グラウバーマンの定理　G を有限単純群とし S をそのシロー 2 部分群とし，z を S の任意の位数 2 の元としよう．このとき，z は G の中で S の z 以外の元と共役になる．　∎

モンスターの設定条件の $C_{\mathbb{M}}(z)$ にもどると，このグラウバーマンの定理により $z\neq z'\in C_{\mathbb{M}}(z)$ が存在して，z と z' は $\mathbb{M}$ の中で共役となる．$(z')^g=g^{-1}z'g=z$ のとき，$C_{\mathbb{M}}(z')^g=C_{\mathbb{M}}(z)$ となるので特に $(C_{\mathbb{M}}(z')\cap C_{\mathbb{M}}(z))^g\subset C_{\mathbb{M}}(z)$ となる．このように，$(z')^g=z$ という元の間の共役関係は部分群間の共役を誘導する．それは新たな位数 2 の元の共役関係を連鎖的に引き起こし，結局，最終的には $\mathbb{M}$ はちょうど 2 つの位数 2 の元の共役類を持つことが言える．$z'\in Q$ とできることもわかる．t を z と $\mathbb{M}$ の中で共役でない位数 2 の元とするとき，$C_{\mathbb{M}}(t)$ の構造もほぼ決まり，上に述べた $O(H)$ の位数も 3^{13} と決まっていく．$\overline{H}=H/O(H)$ とおくと，$C_{\overline{H}}(\overline{z})/\langle\overline{z}\rangle\cong Suzuki$ となっている．あとは $C_{\overline{H}}(\overline{z})=\overline{H}$ を言えば，H の構造も完全にわかる．それが言えないとすると $\overline{H}$ そのものが新単純群である!　なお，$C_{\mathbb{M}}(t)/\langle t\rangle$ はフィッシャー（B. Fischer）の発見した単純群 $Fischer_4$ で，**ベビーモンスター**（Baby Monster）という愛称で呼ばれている．この他にもモンスターの体内には散在

型単純群が多く含まれている．

少し単純化しすぎたきらいもあるが，このようなことを $C_{\mathbb{M}}(z)$ の中に見える素数，そしてその後に見えてくる素数の集合に対して行えば，素数 2 と群の素数グラフの意味で連結しているすべての素数 p に関して $|\mathbb{M}|$ の p ベキ指数が判明する．

コンウェイ（J. H. Conway）とトンプソンは，$|\mathbb{M}|$ の素因数のうち，$p=47,59,71$ 以外の素数に対するベキ指数を定めて，

$$|\mathbb{M}|=2^{46}\cdot 3^{20}\cdot 5^{9}\cdot 7^{6}\cdot 11^{2}\cdot 13^{3}\cdot 17\cdot 19\cdot 23\cdot 29\cdot 31\cdot 41\cdot x$$

を得た後，ベキ指数が判明しているすべての素数に対するシローの定理を満足するような最少数として，

$$x=47\cdot 59\cdot 71$$

を得て，それを，新単純群 $\mathbb{M}$ の位数であろうと予想した．

トンプソンの位数公式を使った厳密な証明もできていると思われるが，そのような論文はないようである．ここでその位数公式なるものを述べておこう．トンプソンの公式は群 G の位数 2 の元の共役類がちょうど 2 個の場合に最も有効に適用できる．3 個以上の場合にも一般化できるが，ここではちょうど 2 個の場合だけ述べる．

z, t を群 G の位数 2 の元の共役類の代表元としよう．このとき次の式が成立する．

定理（**トンプソンの位数公式**）

$$\begin{aligned}|G|=&|C_G(z)||\mathfrak{C}_t\cap C_G(t)\backslash t||\mathfrak{C}_z\cap C_G(t)|\\&+|C_G(t)||\mathfrak{C}_t\cap C_G(z)||\mathfrak{C}_z\cap C_G(z)\backslash z|\end{aligned}$$ ∎

ここで

$$\mathfrak{C}_z=\{z^g\,|\,g\in G\},\quad \mathfrak{C}_t=\{t^g\,|\,g\in G\}$$

である．すなわち，$\mathfrak{C}_z, \mathfrak{C}_t$ は G の元の共役類で，それぞれ z または t を代表元とするものである．$\backslash z, \backslash t$ は z または t を取り除くことを意味する．ト

ンプソンの位数公式は有名なものであるし，証明も簡明なので以下それを示そう．有用で証明の簡明な定理がまだ隠れている可能性があることを示す良い例となろう．

$D=\langle z,t\rangle$ とおくと，D は二面体群である．元 zt の位数が奇数であると，$\langle z\rangle,\langle t\rangle$ が D のシロー 2 群となることにより，z と t は共役となり仮定に反する．ゆえに，zt は偶数位数の元となる．zt のベキを適当にとれば位数 2 の元 d が唯一定まる．$z'\in\mathfrak{C}_z$，$t'\in\mathfrak{C}_t$ として，二面体群 $D'=\langle z',t'\rangle$ で同様なことを行えば，位数 2 の元 d' が唯一定まる．積集合 $\mathfrak{C}_z\times\mathfrak{C}_t$ から和集合 $\mathfrak{C}_z\cup\mathfrak{C}_t$ への写像が定義できたのである．1 つの d に対していくつの組 $(z',t')\in\mathfrak{C}_z\times\mathfrak{C}_t$ が定まるだろうか．それは，簡単にわかる．z' も t' も $C_G(d)$ に入っているからである．ゆえに，

$$|\mathfrak{C}_z||\mathfrak{C}_t|=|\mathfrak{C}_z||\mathfrak{C}_z\cap C_G(z)\backslash z||\mathfrak{C}_t\cap C_G(z)|+|\mathfrak{C}_t||\mathfrak{C}_t\cap C_G(t)\backslash t||\mathfrak{C}_z\cap C_G(t)|$$

が成立する．そこで

$$|\mathfrak{C}_z|=\frac{|G|}{|C_G(z)|},\qquad |\mathfrak{C}_t|=\frac{|G|}{|C_G(t)|}$$

を代入すれば，トンプソンの公式を得る．（多少複雑にはなるが，位数 2 の元の共役類の数が 2 個以上でも位数公式が存在するのも上の証明から明らかである．）

さて，$|\mathbb{M}|$ に再びもどろう．$C_{\mathbb{M}}(z)$ は初めから与えられている．上に述べたトンプソンの位数公式が適用できるためには，次の (1)～(4) が必要である．

(1) $\mathbb{M}$ の位数 2 の元 t で z に共役でないものがあること．

(2) $\mathbb{M}$ の位数 2 の元は すべて z または t に共役であること．

(3) $C_{\mathbb{M}}(t)$ の構造を決めること．

(4) 集合 $\mathfrak{C}_z\cap C_{\mathbb{M}}(z)$, $\mathfrak{C}_t\cap C_{\mathbb{M}}(z)$, $\mathfrak{C}_z\cap C_{\mathbb{M}}(t)$, $\mathfrak{C}_t\cap C_{\mathbb{M}}(t)$ を決定すること．

それら 4 項の情報が得られるとモンスター $\mathbb{M}$ の位数が求められることになる．ただし，(4) の情報を正確に決めるのはなかなか困難なこともある．「$C_{\mathbb{M}}(z)$ は位数 2^{25} のエクストラスペシャル群の $Conway_1$ による拡大である」と言ってもその構造がただ 1 つに決まっているわけではなく，また，い

くつかのうちの唯一の構造に定まることが証明できても，その位数 2 の元の分布状況とそれらの $\mathbb{M}$ における共役性をすべて決めるのは容易ではない．

トンプソンの位数公式を見ると，$\mathfrak{C}_z \cap C_{\mathbb{M}}(t)$ などの集合を正確に知らなくても，$|\mathfrak{C}_z \cap C_{\mathbb{M}}(t)|$ の上限さえわかれば，$|\mathbb{M}|$ の上限を知ることができる．かなりの分析をしておけば，$\mathfrak{C}_z \cap C_{\mathbb{M}}(t)$ 等の集合の上限も実際成立しているものに近いであろう．そうすれば，得られた $|\mathbb{M}|$ の上限もかなり正確なものであろう．

前にも述べたように，

$$|\mathbb{M}| = 2^{46}\cdot 3^{20}\cdot 5^{9}\cdot 7^{6}\cdot 11^{2}\cdot 13^{3}\cdot 17\cdot 19\cdot 23\cdot 29\cdot 31\cdot 41\cdot x$$

となることは厳密に証明できるので，x の上限が判明すれば，すでにベキ指数が判明している素数 $p=2\sim 41$ に関するシローの定理を使って，$x=47\cdot 59\cdot 71$ と判明し，コンウェイの予想したモンスターの位数が正しかったことが証明されるのであろう．

3.2 モンスターの 196883 次の既約指標

位数がわかるということは，新単純群 $\mathbb{M}$ が事実上発見されたことになる．次の課題は，$\mathbb{M}$ の共役類を定め，各共役類からの代表元の中心化群の位数を定め，そして，それらの情報を使って，$\mathbb{M}$ の指標表を作りあげることである．$\mathbb{M}$ は 194 個の共役類を持っていることが最終的にはわかるのだが，その決定にはなかなか細かい神経が必要である．素数位数，例えば，位数 2 とか，3 の元の共役類の決定は比較的やさしいが，複合数，例えば，位数 12 とか，24 の元の共役類の決定が複雑なのである．ちなみに，$\mathbb{M}$ は，それぞれ，10 個の位数 12 と 24 の元の共役類を持つ．

さて，いよいよ $\mathbb{M}$ の指標表の構成へと移ることになる．単純群の指標表の構成には，最小次数の既約指標を探すのがまず最初の目標となる．モンスターの既約指標の最小可能次数は 196883 であることを示そう．記号をもう一度整理して書く．

(1) $\mathbb{M}$ = モンスター．

(2) $C=C_{\mathbb{M}}(z)$, z は $\mathbb{M}$ のシロー 2 群の中心に属する位数 2 の元.

(3) $Q=O_2(C)$, すなわち, Q は C の正規 2 群で最大なもの. Q は位数 2^{25} のエクストラスペシャル群となっている. ゆえに, $Q'=[Q,Q]=Z(Q)=\Phi(Q)=\langle z\rangle\cong Z_2$.

(4) $C/Q\cong Conway_1$.

(5) $C_C(Q)=\langle z\rangle$.

C/Q が $Conway_1$ に同型なことから, Q は 位数 8 の二面体群 D_8 の 12 個の中心積となっており, いわゆるプラス型と言われるエクストラスペシャル群である. Q のフラッティニ (G. Frattini) 部分群 $\Phi(Q)$ が $\langle z\rangle$ に等しいから, $Q/\langle z\rangle$ は 位数 2 の素体 $GF(2)$ 上の 24 次のベクトル空間となっている. Λ をリーチ格子とするとき, $Q/\langle z\rangle\cong\Lambda/2\Lambda$ でその上に $C/Q\cong Conway_1$ が自然に作用しているのである.

C の構造は上の条件 (2) ~ (4) だけからは一意的に定まらないが, 単純群 $\mathbb{M}$ の中に $C=C_{\mathbb{M}}(z)$ として埋め込められているという条件の下では一意的に定まる. モンスターが仮に存在しなかったとしても, C そのものは実在する群である.

χ を $\mathbb{M}$ の自明でない既約指標としよう. χ の次数がどのくらい小さくとれるかを知りたい. 性質の詳しくわかった $\mathbb{M}$ の部分群は C だけであるから, χ の C への制限 $\chi|_C$ の様子を調べてみよう.

C の正規部分群は大きい方から $C\supset Q\supset\langle z\rangle\supset\langle 1\rangle$ の 4 つだけなので,

$$\chi|_C=\chi_C+\chi_Q+\chi_z+\chi_1$$

と書ける. χ_C は $\chi|_C$ を C の既約表現に分解したときの C を核に持つ既約成分の和であり, χ_Q などの意味も同様である. χ は単純群 $\mathbb{M}$ の指標だから $\chi_1\neq 0$ である. 前節で z は $\mathbb{M}$ の中で Q の元 $z_1\neq z$ に共役となると述べた. そのことを使うと, $\chi_z\neq 0$ も言える. それを示してみよう.

仮に, $\chi_z=0$ としよう. このとき,

$$\begin{aligned}\chi(z) &= \chi_C(1)+\chi_Q(1)-\chi_1(1)\\ \chi(z_1) &= \chi_C(1)+\chi_Q(1)+\chi_1(z_1)\end{aligned}$$

となる．$z \in Z(C)$ なので，$\chi_1(z) = -\chi_1(1)$ となっているのである．z と z_1 は仮定により $\mathbb{M}$ で共役だから $\chi(z) = \chi(z_1)$，すなわち，

$$\chi_1(z_1) = -\chi_1(1)$$

が得られる．しかし，これが成立するのは，$z_1 \in Z(C)$ のときに限り，それから $z_1 = z$ という矛盾を得るので，$\chi_z \neq 0$ でなければならない．$\chi_1 \neq 0, \chi_z \neq 0$ が得られたが，実は，この情報だけから $\chi(1) \geqq 196883$ が得られるので，χ_1, χ_z の性質をさらに調べよう．χ_1 は C で忠実な表現の指標である．χ_1 の Q への制限 $\chi_1|_Q$ は Q の忠実な指標を既約成分として持たなければならない．Q は エクストラスペシャル群なので，忠実な既約指標 φ をただ1つだけ持ち，$\varphi(1) = 2^{12}$ である．φ 以外の Q の既約指標は，すべて次数が1のいわゆる線型指標である．φ は Q の唯一の忠実な既約指標であるので C で不変である．すなわち φ の C の元にする共役指標 $\varphi^h, h \in C$ はすべて φ に一致する．このような状況での一般論は，第2章で述べたように，クリフォードの定理によって解決している．再度述べれば，

クリフォードの定理 G を有限群，N をその正規部分群，φ を N の G 不変な既約指標としよう．χ を G の指標で，χ の N への制限 $\chi|_N$ が既約成分 φ を含むとする．このとき，$\chi = \psi \otimes \widetilde{\varphi}$ と書けていて，$\psi, \widetilde{\varphi}$ はともに G の射影表現の指標であり，さらに，

(a) ψ の核は N を含む．すなわち，ψ は G/N の射影表現の指標でもある．

(b) $\deg \widetilde{\varphi} = \deg \varphi$，$\widetilde{\varphi}|_N = \varphi$ ∎

一般には，φ を G の指標に持ち上げることはできないのであるが，G の射影表現の指標には持ち上げることができるのである．ゆえに，もし，G/N のすべての射影表現が通常表現に同値であれば，$\widetilde{\varphi}$ は通常指標となり，φ を G に持ち上げることができるのである．

以上の結果を我々の群 C に適用してみよう．$G = C, N = Q$，そして φ を次数 2^{12} の Q の唯一の忠実な既約表現とすれば，φ は C 不変となり，クリフォードの定理が使える設定となる．しかし，射影表現というのは，なかなか直接には扱いにくい．群 G の射影表現を直接調べるより，それと同値である群 G の中心拡大の通常表現を考える方が議論が容易である．クリフォード

の定理によれば，$\widetilde{\varphi}$ も ψ も G の射影表現であるが，一方が通常表現ならば他方もそうなる．ψ は「小さい」群 G/N の表現なので考えやすい．我々の場合には，$C/Q \cong Conway_1$ となる．$Conway_1$ は真の射影表現を持つ．そこで $Conway_1$ の中心拡大である $\mathrm{Aut}(\Lambda) = .O$ を考えよう．ここで Λ はリーチ格子としてすなわち，Q の $\mathrm{Aut}(\Lambda)$ による作用が自明でない拡大を考えたい．そのような群の存在がまず問題となる．C が Q と $K \cong Conway_1$ との半直積であれば，K の中心拡大 $\widehat{K} \cong .O$ と Q の半直積を作ればよいのであるが，C は Q と K の半直積に書けているとは限らない．

再び Q に帰って，φ を今までと同じく Q の 2^{12} 次の忠実な既約指標とし，T をその表現空間としよう．Q を $GL(T)$ の中に埋め込む．すなわち，$Q \subset GL(T)$ とみなそう．$N = N_{GL(T)}(Q)$ とおくと，$N/Q \cong O^+(24,2)$ となる．このことは，Q が T 上既約であるので，シューアの補題より，$C_{G(T)}(Q) = Z(Q) \cong Z_2$ となり，$Q/Z(Q)$ は 2^{24} 次元のプラス型の直交空間とみなせることにより納得できるだろう．

Λ はリーチ格子であるから $\mathbb{R}$ 上の内積が与えられているが，$\Lambda/2\Lambda$ もリーチ格子に与えられた 2 次形式を 2 を法として考えて 2^{24} 次元の直交空間とみなせる．$\mathrm{Aut}(\Lambda) = .O$ の中心は，$\Lambda/2\Lambda$ に自明に作用するので，$Conway_1 \subset O^+(24,2)$ とみなせることがわかる．$N/Q \cong O^+(24,2)$ であったので，N は部分群 C_1 で，$C_1 \supset Q, C_1/Q \cong Conway_1$ となっているものが存在する．$C \supset Q, C/Q \cong Conway_1$ だから，$C_1 = C$ と予想したいが実はそうならない．ともかく，C_1 は実在する群であり，$GL(2^{12}, \mathbb{R})$ の中に入っているので 2^{12} 次の既約表現を持っている．必要ではないが，C_1 は Q の $Conway_1$ による不分岐拡大となっている．のみならず，$C_1/Z(Q)$ も位数 2^{24} の初等可換群の $Conway_1$ による不分岐拡大となっている．$Conway_1 \subset O^+(24,2)$ だから，位数 2^{24} の初等可換群と $Conway_1$ との分岐拡大（半直積）も作れるのだが，$C_1/Z(Q)$ はそれではない．

$C_1/Q \cong Conway_1$ であり，$Conway_1$ から $.O$ へ移行するために $C_1/Z(Q)$ のシューア乗数（Schur multilpier）を考えよう．

$$H^2(C_1, \mathbb{C}) \cong Z_2$$

となることが知られている．そこで，群 C_2 で，

$$C_2/Z(C_2) \cong C_1/Z(Q)$$
$$Z(C_2) \cong Z_2 \times Z_2$$
$$Z(C_2) \subset [C_2, C_2]$$

となっているものを考えよう*1)．$O_2(C_2) = Q_2$ とおけば，$Q_2 \cong Z_2 \times Q$ である．Q_2 は C_2 の正規部分群で Q に同型となっているものを含んでいることを次に示そう．

$[Q_2, Q_2] = \langle z \rangle \cong Z_2$ とおくとき，$Q_2/\langle z \rangle \cong (Z_2)^{25}$ であるが，$C_2/Q_2 \cong Conway_1$ は，$Q_2/\langle z \rangle$ の上に $Z(Q_2)/\langle z \rangle$ という 1 次元不変部分空間を持ち，$Q_2/Z(Q_2) \cong \Lambda/2\Lambda$ である．

$$H^1(Conway_1, \Lambda/2\Lambda) = 0$$

となることは知られているので*1)，$Conway_1$ の $Q_2/\langle z \rangle$ への作用は完全可約である．すなわち，$Q_2/\langle z \rangle$ は C_2/Q_2 の次数 2^{24} の不変部分空間を持つ．その Q_2 への原像は $Q_2 \cong Z_2 \times Q$ であることにより，Q に同型である．よって，それを Q と同一視すると，次の設定を得る．

(1) $C_2 \triangleright Q$.

(2) $C_2/Q \cong \mathrm{Aut}(\Lambda) \cong .O$.

(3) Q は位数 2^{25} のプラス型のエクストラスペシャル群，$Z(Q) = \langle z \rangle \cong Z_2$.

(4) $O_2(C_2) = Q_2 = \langle u \rangle \times Q$，$Z(Q_2) = \langle u, z \rangle \cong Z_2 \times Z_2$.

(5) $C_2/\langle u \rangle$ と $C_2/\langle uz \rangle$ はどちらも位数 2^{25} のエクストラスペシャル群の $Conway_1$ による拡大となっており，$C_2/\langle z \rangle$ は位数 2^{25} の初等可換群の $Conway_1$ による拡大である．記号的に書けば，

$$C_2/\langle u \rangle \cong 2^{1+24} Conway_1$$
$$C_2/\langle uz \rangle \cong 2^{1+24} Conway_1$$
$$C_2/\langle z \rangle \cong 2^{25} Conway_1$$

---

*1) あとがきの中の文献 [7]．

となる．$\mathrm{Aut}(\Lambda)=.O$ の射影表現はすべて通常表現に同値なので，クリフォードの定理を適用するのには，C_1 よりもこの C_2 の方が都合がよい．

Q は 2^{25} のエクストラスペシャル群でそれは唯一の忠実な既約指標を持っていた．それを φ とおいた．$\varphi(1)=2^{12}$ である．クリフォードの定理により，φ は C_2 の通常指標 $\widetilde{\varphi}$ に持ち上げることができる．C_2 の既約指標 ζ で Q への制限 $\zeta|_Q$ が既約成分として φ を含むとすると，

$$\zeta=\psi\otimes\widetilde{\varphi}$$

と書かれ，ψ は $C_2/Q\cong .O$ の（通常）指標である．逆に $\psi\otimes\widetilde{\varphi}$ と書かれる C_2 の指標はすべて既約で，その Q への制限は φ は整数倍となる．さて，$\zeta=\psi\otimes\widetilde{\varphi}$ をそのようなものの 1 つとする．$Z(Q_2)=\langle u,z\rangle\cong Z_2\times Z_2$ なので，

$$\ker\zeta\cap Z(Q_2)>1$$

である．$Q_2/\langle z\rangle$ は可換なので，$\ker\zeta\ni z$ とはなり得ない．ゆえに，

$$\ker\zeta\cap Z(Q_2)=\langle u\rangle \quad \text{または} \quad \langle uz\rangle$$

である．ζ は Q の上では忠実であるから，

$$\ker\zeta=\langle u\rangle \quad \text{または} \quad \langle uz\rangle$$

となる．特に，$\psi=1$ のときは，$\zeta=\widetilde{\varphi}$ であるが，$\ker\widetilde{\varphi}=\langle u\rangle$ または $\langle uz\rangle$ である．u と uz の名前をつけ変えても一般性を失わないので，以後，$\ker\widetilde{\varphi}=\langle u\rangle$ とする．$\overline{C_2}=C_2/\langle u\rangle$ とおくとき，$\overline{Q_2}\cong Q$, $\overline{C_2}/\overline{Q_2}\cong Conway_1$ であり，しかも $\overline{C_2}$ は次数 2^{12} の忠実な既約指標を持つ．

次に ψ として $.O$ の 24 次の既約指標をとる．ψ は $Conway_1$ の真の意味の射影表現の指標である．すなわち，通常指標ではない．$\zeta=\psi\otimes\widetilde{\varphi}$ のとき，$\ker\zeta$ はどんなものだろうか．いずれにしても $\psi,\widetilde{\varphi}$ はともに，$C_2/\ker\zeta$ の真の射影表現となっている．$C_2/Q_2\cong Conway_1$ は 24 次の通常表現を持たないからである．もし，$\ker\zeta=\langle u\rangle$ とすると，$\widetilde{\varphi}$ は $\overline{C_2}=C_2/\langle u\rangle$ の通常指標でもあり，また同時に，真の意味の射影表現の指標にもなって矛盾である．ゆえに，

$$\ker\zeta=\langle uz\rangle$$

という結論になる．$\widetilde{C_2}=C_2/\langle uz\rangle$ と書けば，

（1）$\widetilde{Q}_2\cong Q$, 位数 2^{25} のエクストラスペシャル群

（2）$\widetilde{C}_2/\widetilde{Q}_2\cong Conway_1$

となる．このようにして，我々はモンスター $\mathbb{M}$ のシロー 2 群の中心に属する位数 2 の元 z の中心化群 $C_{\mathbb{M}}(z)=C$ の可能な構造を 2 つ見出した．1 つは $C_2/\langle u\rangle$ であり，次数 2^{12} の忠実な既約指標をもち，もう 1 つは，$C_2/\langle uz\rangle$ で，そういうものを持たない．$C_2/\langle u\rangle$ は単純群の中に埋め込められないことが証明できるので $C\cong C_2/\langle uz\rangle$ が成立し，C の忠実な指標の最小次数は $2^{12}\cdot 24=98304$ である．ゆえに，

$$\chi_1(1)\geqq 98304$$

が得られる．C の構造の唯一性についてもう一言付け加えよう．$C/\langle z\rangle\subset \mathrm{Aut}(Q)$ であり，また $C_1/\langle z\rangle\subset\mathrm{Aut}(Q)$ でもあるので $C/\langle z\rangle\cong C_1/\langle z\rangle$ は初めからわかっているのである．

C の構造が決まったので，C_1，それから作られた $C_2, \overline{C_2}, \widetilde{C_2}$ などは忘れてしまおう．

さて次に，χ_z の最小次数を計算しよう．そこで ζ を C の既約指標で $\ker\zeta=\langle z\rangle$ となるものとしよう．$\zeta|_Q$ は Q の 1 次の指標の和である．$\zeta|_Q$ の成分として $Q/\langle z\rangle$ の指標 η が入っているならば，その共役 η^h, $h\in C$ も $\zeta|_Q$ の成分である．$Q/\langle z\rangle$ の 1 次の指標の C での共役性は，$Q/\langle z\rangle$ が自己相対的（self-dual）な 2 次形式を持っているから，$Q/\langle z\rangle$ の元の共役性と同値である．実は自己相対的という言葉を持ち出さなくてもよい．T を Q の z を含む位数 4 の部分群とすれば，$C_Q(T)$ は Q の極大部分群で $[Q:C_Q(T)]=2$ である．$T/\langle z\rangle\cong Z_2$ に対して $C_Q(T)/\langle z\rangle$ を核に持つ Q の 1 次の指標を対応させればよい．$Q/\langle z\rangle$ は $\Lambda/2\Lambda$ と $Conway_1$ 加群として同値であり，その作用は詳しく調べられている．

定理 リーチ格子 Λ の各々のベクトルは 2Λ を法として $\mathrm{Aut}(\Lambda)$ の作用で，次のどれかの軌道に属する．

（a）0,

（b）$\{x,-x\}$, $\quad x\in\Lambda_4=\{\lambda\in\Lambda\mid\langle\lambda,\lambda\rangle=4\}$,

（c）$\{x, -x\}$,　　$x \in \Lambda_6 = \{\lambda \in \Lambda \mid \langle \lambda, \lambda \rangle = 6\}$,

（d）$\Lambda_8 = \{\lambda \in \Lambda \mid \langle \lambda, \lambda \rangle = 8\}$ の 48 個の組. ∎

この定理により,

$$|\Lambda/2\Lambda| = 2^{24} = 1 + \frac{1}{2}|\Lambda_4| + \frac{1}{2}|\Lambda_6| + \frac{1}{48}|\Lambda_8|$$
$$= 1 + \frac{196560}{2} + \frac{16773120}{2} + \frac{398034000}{48}$$

を得る. このことは,

$$\zeta(1) \geqq 98280$$

を意味し, さらに, $\chi_1(1) \geqq 98304$ と合わせて,

$$\chi(1) \geqq 98280 + 98304$$

を得る.

指標の次数は群の位数を割り切るので,

$$\chi(1) \geqq 299 + 98280 + 98304 = 196883 = 47 \cdot 59 \cdot 71$$

と望む数が得られた. 299 も $Conway_1$ の既約指標の次数である. ただし, $Conway_1$ の最小の自明でない既約指標の次数は 276 である.

モンスター $\mathbb{M}$ が次数 196883 の既約指標 χ を持つかどうかを直接に証明するのは困難であるが, それが存在すると仮定して, 194 個のモンスターの各共役類の代表元における値を計算することはできる. その後は 196883 の既約指標 χ の対称積, 交代積などを計算して, 既約指標の数を増やすことになる. 全部で 194 個の既約指標を見つければそれで終わりとなる. 大仕事であるが, 1973 年にモンスターが発見されてから, 数年後にその仕事は完成された. 既約指標の次数の小さい方から 15 個と大きい方から 15 個は付録 2 に示した.

3.3 モンスターと可換代数

モンスター $\mathbb{M}$ の次数 196883 の既約指標 χ の 194 個のモンスターの各共役類の代表元における値を計算すると, 以下の（1）～（4）が得られる.

（1）χ は有理指標である．すなわち，$\chi(g)\in\mathbb{Z}$ がすべての $g\in\mathbb{M}$ について成立している．

（2）$\langle S^2(\chi),\ 1\rangle=1$.

（3）$\langle S^2(\chi),\ \chi\rangle=1$.

（4）$\langle S^3(\chi),\ 1\rangle=1$.

上に述べた 4 つの性質は何を意味しているだろうか．B_0 をモンスターの 196883 次の表現空間としよう．（1）は B_0 の定義体を有理数体 $\mathbb{Q}$ とできることを意味する．（2）は $B_0\times B_0$ から $\mathbb{Q}$ への $\mathbb{M}$ 不変な対称双 1 次形式が，ただ 1 つ（定数倍は以下除いて考える）存在することを示し，（3）は $B_0\times B_0$ から B_0 自身の中への対称線型写像，すなわち可換な代数構造 $(a,b)\to ab\in B_0$ が，ただ 1 つ存在することを意味する．同様に，（4）は，$B_0\otimes B_0\otimes B_0$ から $\mathbb{Q}$ への $\mathbb{M}$ 不変な 3 項からなる対称線型形式 $f:B_0\otimes B_0\otimes B_0\to\mathbb{Q}$ が，ただ 1 つ存在することを示す．すなわち，

$$\{a,b,c,\}=\{a',b',c'\}\quad ならば\quad f(a\otimes b\otimes c)=f(a'\otimes b'\otimes c')$$

が成立している．それゆえ，

$$f(a\otimes b\otimes c)-f(b\otimes a\otimes c)=0$$

となるから，

$$f(A^2(B_0)\otimes C)=0$$

を得る．

$$B_0\otimes B_0=S^2(B_0)\oplus A^2(B_0)$$

であるから，$B_0\otimes B_0$ の元を x とするとき，$f(x\otimes c)$ の値は x の $S^2(B_0)$ への射影のみによって定まる．一方，上記の（3）によって，$S^2(B_0)$ は B_0 に同型な成分をただ 1 つだけ含む．すなわち，（指標間の内積 $\langle\ \ ,\ \ \rangle$ を表現にも使って）

$$S^2(B_0)=B_0\oplus C,\qquad \langle C,\ B_0\rangle=0$$

$$\langle S^2(B_0)\otimes B_0,\ 1\rangle=\langle B_0\otimes B_0,\ 1\rangle=1$$

により，

$$\langle C\otimes B_0,\ 1\rangle=0.$$

これは，

$$f(C\otimes B_0)=0$$

を意味するから，$f(S^2(B_0)\otimes B_0)$ の値は $S^2(B_0)$ の B_0 への射影のみによって定まる．

ゆえに，

$$\langle ab,\ c\rangle=\langle a,\ bc\rangle$$

が成立する．まとめると，

定理　B_0 をモンスター $\mathbb{M}$ の 196883 次の既約指標の表現空間とするとき，次のことが成立する．

(a) B_0 には $\mathbb{M}$ 不変な（必ずしも結合的でない）可換代数の構造が入る（積を ab と書く）．

(b) B_0 は $\mathbb{M}$ 不変な対称双 1 次形式 $\langle\ ,\ \rangle$ を持つ．

(c) B_0 の可換代数と対称双 1 次形式の間には，$\langle ab,\ c\rangle=\langle a,\ bc\rangle$ の関係が成立する． ∎

一般に定理の (c) が成立しているような可換代数の上の対称双 1 次形式を**結合的な対称双 1 次形式**と呼ぶ．モンスターの 196883 次の表現空間には結合的な対称双 1 次形式が入るのである．

グライス（R. L. Griess Jr.）はこのことを使って，モンスターを実際に構成することに成功した．以下，それについて略述する．

モンスターには 196883 次の既約表現の存在が予想され，その表現空間 B_0 に結合的で対称的な双 1 次形式 $\langle\ ,\ \rangle$ を持つ可換代数の構造が入ることがわかった．

$$\mathrm{Aut}(B_0)=\{g\in GL(B_0)\,|\,(ab)^g=a^gb^g,\ \langle a^g,b^g\rangle=\langle a,b\rangle\}$$

としよう．

以下，モンスター $\mathbb{M}$ が $\mathrm{Aut}(B_0)$ の中に部分群として入っていることの道筋を示す．

$$\{v_i\}_{i=1}^{196883}$$

を B_0 の基底とするとき，

$$v_i v_j = \sum_{k=1}^{196883} a_{ij}^k v_k, \quad a_{ij}^k \in \mathbb{C}$$

となる構造定数 a_{ij}^k をすべての i,kj,k に対して決定すれば B_0 の構造が定まる．そうしてはじめて $\mathbb{M} \subset \mathrm{Aut}(B_0)$ が言えるというのが筋書きではあるが，実際は $\mathbb{M} \subset \mathrm{Aut}(B_0)$ と想定して構造定数を決めていく．$\mathbb{M}$ の 196883 次の既約指標は C の上では

$$\chi = \chi_Q + \chi_z + \chi_1$$

と分解された．U_0, V, W を対応する C の表現空間とすると

$$B_0 = U_0 \oplus V \oplus W$$

であり，各成分の次元（dimension），核（kernel=ker）は下記の通りである．

	次元	核
U_0	299	Q
V	98280	$\langle z \rangle$
W	98304	1

空間 U_0 は 1 次元の $\mathbb{M}$ の自明な表現を加えた

$$U = 1 \oplus U_0$$

を使う方が便利なので以下そのようにし，

$$B = U \oplus V \oplus W$$

とおく．各空間のやや詳しい性質を記述しよう．

（1）空間 U $\quad \dim U = 300 = 1 + 299$

Λ をリーチ格子とする．Λ は $\mathbb{Z}$ 加群であるが，Λ の $\mathbb{R}$ による係数拡大 $\mathbb{R}\otimes\Lambda$ も Λ と書くことにする．Λ の 2 次対称積 $S^2(\Lambda)$ の次元は $300=\dfrac{24\cdot 25}{2}$ であって，

$$U=S^2(\Lambda)$$

となっている．Λ の基底を $\{x_1,\cdots,x_{24}\}$ とすると，U の基底は，

$$\{u_{ij}\}_{1\leqq i,j\leqq 24},\quad u_{ij}=\frac{x_i\otimes x_j+x_j\otimes x_i}{2}$$

である．

(2) 空間 V $\quad \dim V=98280=\dfrac{1}{2}|\Lambda_4|$

ここで $\Lambda_4=\{\lambda\in\Lambda\,|\,\langle\lambda,\lambda\rangle=4\}$ である．V の Q への制限 $V|_Q$ は

$$V|_Q=\sum_{c\in C}{}'\zeta^c$$

と書ける．ただし，$\sum_{c\in C}{}'\zeta^c$ は 98280 個の ζ の C における異なった共役表現全部の和とする．ζ は Q の 1 次の表現なので，その核は位数 2^{24} であり Q の極大部分群である．$Q_1=\ker\zeta$ とおくと $|Q_1|=2^{24}$, $|Z(Q_1)|=4$ である．そして $Z(Q_1)/\langle z\rangle\in\Lambda/2\Lambda$ が Λ_4 の元に対応しているのである．ζ の C における固定群（惰性群）を $I(\zeta)$ とするとき，

$$I(\zeta)/Q\cong Conway_2$$

となっているが，これは $Conway_2$ は Λ_4 のある 1 つの元を固定する $Conway_1$ の部分群として定義されているから当然である．

$$|I(\zeta)/Q_1|=2|Conway_2|$$

であるが，$Conway_2$ のシューア乗数は自明なので，

$$I(\zeta)/Q_1\cong Z_2\times Conway_2$$

となる．ζ は，Q/Q_1 で -1 となる表現であるが，単純群成分 $Conway_2$ を核に入れて ζ を $I(\zeta)$ の表現 $\tilde{\zeta}$ に自然に持ち上げることができる．

これらの記号の下で

$$V = \widetilde{\zeta}^C = \left(\left((-1)_{I(\zeta)}\right)\right)^C$$

である．その形から V は単項（monomial）表現でその行列成分は ± 1 のみである．$\ker \zeta = Q_1$ で，$Z(Q_1)/\langle z \rangle$ の $\Lambda/2\Lambda$ における像が Λ_4 の元に対応していたのだから，V の基底を

$$\{v(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda_4,\ v(\lambda) = v(-\lambda)\}$$

と書くことができる．

（3）空間 W 　　$\dim W = 2^{12} \cdot 24 = 98304,\ W = T \otimes \Lambda$

リーチ格子 Λ は $Conway_1$ の 24 次の射影表現を与え，T は 次数 2^{12} の $C = C_{\mathbb{M}}(z)$ の射影表現をあたえる．T の Q への制限を $T|_Q$ とすれば，$T|_Q$ は Q の唯一の忠実な（通常）既約表現となる．

$T|_Q$ が具体的にどのように表わされるかを以下に記す．

$$Q = EF$$

と 2 つの初等可換群 E と F 半直積に書くことができる．ここでは，$|E| = 2^{13}$, $|F| = 2^{12}$ で E は Q の中で正規である．T の E への制限は

$$T|_E = \varphi_1 + \cdots + \varphi_{2^{12}}$$

と 2^{12} 個の 1 次の表現 φ_i の和となる．φ_i らがすべて異なることを示そう．$\{\varphi_i\}_{i=1}^{2^{12}}$ は Q で共役であり，各 φ_i の核は $\langle z \rangle$ を含まない．E は可換なので $\{\varphi_i\}$ の E の中の共役は F の元でとれる．E_1 を φ_1 の核とすると，E_1 は z を含まない E の極大部分群である．すなわち，

$$E = E_1 \times \langle z \rangle.$$

もし，$N_Q(E_1) > E$ ならば $x \in N_Q(E_1) \cap F$ のとき $[x, E_1] \subset E_1$ で，しかも，$[Q, Q] = \langle z \rangle$ だから $[x, E_1] = 1$，すなわち $\langle x, E_1, z \rangle$ は位数 2^{14} の Q の可換部分群となる．2^{13} が Q の可換部分群の最大位数であるから，これは矛盾である．ゆえに，φ_1 の核 E_1 の Q の中の正規化群は E である．特に，F の自明でない元は $E_1 = \ker\ \varphi_1$ の正規化群には入らない．よって，φ_1 は F の

元で 2^{12} 個の共役を持つ．これは $\{\varphi_i\}_{i=1}^{2^{12}}$ の元がすべて異なること，さらに，$T|_Q$ が φ_1 の Q への誘導表現であることを示す．

$$T|_Q=\varphi_1^Q$$

以上の準備の下に，空間 W の基底を記述しよう．

$e(1)$ を表現 φ_1 の固有単位ベクトルとし，$e(f)=e(1)^f$, $f\in F$ としよう．$e(f)$ は表現 φ_1^f に対応する固有単位ベクトルである．このとき，

$$\{e(f)\otimes x_i\,|\,f\in F,\ 1\leqq i\leqq 24\}$$

が W の 1 つの基底である．

モンスターの表現空間 B の C の制限は

$$B=\langle 1\rangle\oplus U_0\oplus V\oplus W$$

であり，各空間 U_0, V, W のやや詳しい性質も記述した．代数構造に関して少しだけ述べる．まず，1 は B の単位元と仮定する．すなわち，

$$1a=a1=a,\quad a\in B$$

（$B_0=U_0\oplus V\oplus W$ は $\mathbb{M}$ の既約表現だから B_0 の中に単位元が入っていることはあり得ない．）

B の代数構造は，

$$U_0^2,\ VV_0,\ VW$$

等を決定することによって求められる．

A_1, A_2, A_3 を $C=C_{\mathbb{M}}(z)$ 加群の集合 $\{1,\ U_0,\ V,\ W\}$ の任意の 3 つの元としよう．同じ元を繰り返して選んでもよいとする．可換代数 B 内での積 A_1A_2 に A_3 という成分が入っているとすれば，

$$\mathrm{Hom}_C(A_1\otimes A_2,\ A_3)\neq 0$$

である．逆は必ずしも成立しない．さらに，

$$\dim \mathrm{Hom}_C(A_1\otimes A_2,\ A_3)$$

を調べると，積 A_1A_2 の中に A_3 という成分がどのくらいの自由度を持って入ることができるかも判明する．

$$\langle A_1 \otimes A_2,\ A_3 \rangle = \dim \mathrm{Hom}_C(A_1 \otimes A_2,\ A_3)$$

とおけば，次の補題が成立する．

補題 $\langle A_1 \otimes A_2,\ A_3 \rangle \neq 0$ とすれば，A_1, A_2, A_3 のうち，2つが等しく，かつ第3の加群が1に等しいか，または次のどれかが成立する*2)．

(a) $\langle U_0 \otimes V, V \rangle = \langle U_0, V \otimes V \rangle = \langle U_0, S^2(V) \rangle = 1$

(b) $\langle U_0 \otimes W, W \rangle = \langle U_0, W \otimes W \rangle = \langle U_0, S^2(W) \rangle = 1$

(c) $\langle V \otimes V, V \rangle = \langle S^2(V), V \rangle = \langle S^3(V), 1 \rangle = 1$

(d) $\langle V \otimes W, W \rangle = \langle V, W \otimes W \rangle = \langle V, S^2(W) \rangle = 2$

(e) $\langle U_0 \otimes U_0, U_0 \rangle = \langle S^2(U_0), U_0 \rangle = \langle S^3(U_0), 1 \rangle = 1$ ∎

$1, U_0, V, W$ はすべて有理表現なので

$$\langle A_1 \otimes A_2,\ A_3 \rangle = \langle A_1, A_2 \otimes A_3 \rangle$$

となっている．補題の証明はしないが，A_1, A_2, A_3 がすべて異なるときには，

$$\langle A_1 \otimes A_2,\ A_3 \rangle = 0$$

であることが簡単にわかる．それには，

$$\langle U_0 \otimes V,\ W \rangle = 0$$

を示せばよく，$U_0 \otimes V$ は $C/\langle z \rangle$ の表現，W は C の忠実な表現であることからそれは成立している．

このようにして，加群 U_0, V, W の間の B の中での積の可能性は著しく制限される．道のりは実はまだまだ長いのだが，グライスは次のことを証明する．

定理 B の $C = C_{\mathbb{M}}(z)$ 不変で結合的で対称的な双1次形式 $\langle\ ,\ \rangle$ を持つ可換代数の構造は6個のパラメーターによって記述される． ∎

*2) あとがきの中の文献［7］．

単純群モンスター $\mathbb{M}$ にはもちろん $C=C_{\mathbb{M}}(z)$ に入っていない元がある．グライスは記号的に

$$N=2^2\cdot 2^{11}\cdot 2^{22}\cdot (S_3\times Mathieu_5)$$

と書かれる群 $N<\mathbb{M}$ の S_3 に当たる部分から σ という C の中には入っていない位数 2 の元をとりだし，その σ の性質から上の定理の 6 個のパラメーターを決めていくのである．実際の行程は繊細をきわめるが，B の代数構造を一意に決め，B の自己同型群の中にモンスターを見出すというのがグライスによるモンスターの最初の構成法であった．その後コンウェイがパーカー（R. A. Parker）によって発見されたムーファングループ（Moufang loop）と言われるものを使って上に述べた N という群を位数 4 の群で中心拡大した群 $\tilde{N}$ を主として使うことにより，より簡単な構成方法を示した．いずれにしてもモンスターの自然で明解な構成方法はまだ発見されていないと言ってよいだろう．

3.4　有限群と可換代数

位数最大の散在型単純群であるモンスターが 196884 次元の可換代数の自己同型群として取り出せることを前節までで見てきたが，その他の群と可換代数との関係をこの節で簡単に述べる．

定理　A を次の条件を満足する可換代数としよう．

（a）A は基底 $\{x_1,\cdots,x_n\}$ を持つ標数 p の体 k 上のベクトル空間である．ただし，$n\geqq 2$.

（b）$x_ix_i=(n-1)x_i,\ 1\leqq i\leqq n.$

（c）$x_ix_j=-x_i-x_j,\ 1\leqq i,j\leqq n,\ i\neq j.$ ▮

このとき，$p=0$，または，$p\nmid n+1$ ならば，A の自己同型群は $n+1$ 次の対称群 S_{n+1} に同型となり，$p|n+1$ ならば，k の上の $n-1$ 次元のベクトル空間と $GL(n-1,k)$ とその自然な作用による半直積となる．すなわち，

$$\mathrm{Aut}\,(A)\cong\begin{cases} S_{n+1} & (p=0 \text{ または } p\nmid n+1 \text{ のとき}) \\ k^{n-1}\cdot GL(n-1,k) & (p\,|\,n+1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$x, y\in A$ に対して写像,

$$\Phi_x : x\to xy$$

は A の $\mathrm{End_k(A)}$ への表現

$$\Phi : x\to\Phi_x$$

を定める．線型変換 Φ_x の最小多項式を x の最小多項式と呼ぼう．

$$x_0=-x_1-x_2-\cdots-x_n$$

と定義しよう．そうすると，簡単な計算で次の 2 式がわかる．

$$x_ix_i=(n-1)x_i \quad 0\leqq i\leqq n,$$
$$x_ix_j=-x_i-x_j \quad 0\leqq i,\ j\leqq n,\ i\neq j.$$

定理の条件では上の 2 式は，$1\leqq i\leqq n$, $1\leqq i$, $j\leqq n$ の範囲で成立していたが，0 を含めてもよいことになる．

上式が成立しているので，$n+1$ 次の対称群 S_{n+1} が集合 $\{x_i\,|\,0\leqq i\leqq n\}$ の上に自然に作用している．それゆえ，x_0 の最小多項式と x_i, $1\leqq i\leqq n$ の最小多項式は等しい．x_0 の最小多項式を求めよう．$i\neq 0$ とすると，

$$x_0x_i=-x_0-x_i$$

より，

$$x_0(x_0x_i)=-(n-1)x_0+x_0+x_i$$

を得て，

$$x_0=-x_0x_i-x_i$$

を再び使えば，

$$x_0(x_0x_i)-(n-2)x_0x_i-(n-1)x_i=0$$

となる．i は $i\neq 0$ であれば任意であって，$\{x_i\}_{i=1}^{n}$ は A の基底なので，

$$x_0(x_0a)-(n-2)x_0a-(n-1)a=0$$

が A の任意の元 a に対して成立し，

$$[(\Phi_{x_0})^2-(n-2)\Phi_{x_0}-(n-1)]a=0$$

となる．

$$X^2-(n-2)X-(n-1)=(X-(n-1))(X+1)$$

であり，$X-(n-1)$ も $X+1$ も x_0 の最小多項式とはなり得ないので，

$$X^2-(n-2)X-(n-1)$$

が x_0 の，ゆえにすべての x_i の最小多項式となる．

A の次元は n なので，A の一般の元 a の最小多項式の次数は n または n に近い数と思われるから，

$$X^2-(n-2)X-(n-1)$$

を最小多項式に持つ A の元は多くはないと予想される．実際，そのような元は少しの例外を除いて，集合 $\{x_i\,|\,0\leqq i\leqq n\}$ の元に限るのである．それを示すことによって定理が得られるのである．

たびたび述べたように，群 G の既約指標 χ が

$$\langle S^2(\chi),\chi\rangle\neq 0$$

を満たすならば，χ の表現空間 A は可換代数の構造を持ち，G は $\mathrm{Aut}(A)$ の部分群である．$\mathrm{Aut}(A)$ が G にほぼ等しくないとつまらない．上に述べた定理は G が対称群 S_n のときは，$\mathrm{Aut}(A)\cong G$ となる可換代数 A が存在することを示したのである．その他にも興味ある例が作れるだろうがあまり研究されていない．可換代数と有限群の関係は後章で述べる頂点作用素代数でも重要になってくる．

モンスターの 196883 次の既約表現の空間 B_0 には可換構造のみならず，代数構造となじんだ結合的対称双 1 次形式も入れることができた．しかも，可換代数構造も結合的対称双 1 次形式もただ 1 つだけ存在するのである．

$$\langle S^2(\chi),\chi\rangle = \langle S^2(\chi),1\rangle = \langle S^3(\chi),1\rangle = 1$$

がそのための条件であった．次に散在型単純群でこの条件を満足する群 G と対応する既約指標 χ の組 (G,χ) を表にしよう[*3]．

群	既約指標の次数
$Mathieu_1 = M_{11}$	10, 11
$Mathieu_2 = M_{12}$	11, 11, 45
$Mathieu_3 = M_{22}$	21
$Mathieu_4 = M_{23}$	22, 231
$Mathieu_5 = M_{24}$	23
$Janko_1$	56, 56
$Janko_2$	14, 14, 36
$Janko_3$	323, 323
Higman-Sims	154, 693, 770
McLaughlin	231
Suzuki	143, 364, 1001
$Conway_1$	299, 1771
$Conway_2$	275
$Conway_3$	2024
$Fischer_1$	429, 1430
$Fischer_2$	782, 60996
$Fischer_4 = BabyMonster$	96255
Harada	3344, 9405, 16929
Thompson	4123, 147250
Monster = *Fischer-Griess*	196883

*3) この表は千吉良直紀による．

単位指標は自明なものとして除いてある．散在型単純群の $Janko_4$，$Held$，$Rudvalis$，$Lyons$，$O'Nan$，$Fischer_3$ は条件を満足する既約指標を 1 つも持っていない．上の表にあげた散在型単純群 G とその指標 χ の組 (G,χ) から結合的対称双 1 次形式を持つ可換代数 A を作り，$G \cong \mathrm{Aut}(A)$ が言えるかというのは興味ある問題であろう．$G \cong \mathrm{Aut}(A)$ が言えない例もある．

マシュー群 M_{11} の次数 10 の表現は M_{11} の四重可換の置換表現から単位表現を除いたものである．しかし，それから作った可換代数の自己同型群は対称群 S_{11} になってしまう．一般に，次のことが成立する．

定理　G を n 個の文字の集合 $\{1,2,3,\cdots,n\}$ の上の三重可移群としよう．A をその置換表現の既約成分である $n-1$ 次の表現空間とする．A には G 不変な可換代数の構造がただ 1 つ入る．このとき，$\mathrm{Aut}(A) \cong S_n$ となる[*4)]．∎

G が三重可移であると，可換代数の構造はただ 1 つに定まり，S_n から決まるものと同じになってしまうのである．とすれば，$\mathrm{Aut}(A) \cong S_n$ となることはこの節の最初に述べた定理からわかる．$\mathrm{Aut}(A) \cong G$ を成立させたいということであれば，A にさらに条件を付けてやればよいであろう．そういうものを探すのはおもしろい研究材料を与えそうである．

*4) Harada, K., Symmetric Groups as Automorphisms of Some Commutative Algebras, *J. Alg.*, **94** (1985), 406–410，とそこの引用文献参照．

第 4 章

モンスターとムーンシャイン

前章で位数最大の散在型単純群のモンスターの発見とその構成について述べた．散在型単純群の発見とその構成はどれもそれなりにおもしろいものであるが，特にモンスターの場合はその発見と構成の歴史はそれだけでも素晴しいものである．

しかし，モンスターは位数最大ということにとどまらず，散在型単純群の王たる者にふさわしいものを持っていた．散在型単純群は全部で 26 個あることはこれまでもしばしば述べてきたが，モンスターはそのうちの実に 20 個（自分自身を含めて）をその体内に含んでいる．他の散在型単純群はモンスターのいわば家来のようなものである．モンスターのことがわかることは，少なくとも他の 19 個の散在型単純群のこともわかるということである．

王たるものは，しかし，自分の領内の出来事ばかりでなく，他領のことをも見分する裁量を持っていなければならない．モンスターにはそれもできた．「群が群論だけの世界に閉じ込められている限り，それは大した学問の分野ではない．群は他の分野の数学と関連を持たなくてはならない」ということはしばしば言われてきた．

群論（ここでは主として有限群論をさす）は，誕生してからほぼ 2 世紀の間少しずつ発展し，他の数学の分野と比較して遜色のない程度の分野となるまでの成長を遂げた．しかし，他の分野に利用されることはあっても，互いに強く影響し合うことは今まではなかった．そういう状態は，群論という数学分野にとっては歓迎すべきことではなかったが，それが事実のまま，群論はある意味

での終結，すなわち有限単純群の分類の完成を急いでいたのである．単純群モンスターの発見，構成，そしてその後の研究は，単純群論の持つ世界が閉じてはいないことを，モンスター自らの力で示してくれた．モンスターの見せてくれた世界はもはや願望ではなかった．まぎれもない事実であった．そのことを数学的に見ていくのがこの章の目的である．今のところ他の数学分野と強く関係するのはモンスターだけであるが，このモンスターを1つの突破口として，他の25個の散在型単純群の世界も広がってくることを期待したい．

4.1　マッカイ・トンプソン予想

前章で単純群モンスターの自明でない既約表現の最小次数は196883であると述べた．このことはモンスターが発見されてから間もなく知られたことであった．196883という数自体深い意味を持っていたのであるが，その当時は誰にも注目されなかった．数年を経て最も基本的な保型関数の1つである，いわゆる j 関数の無限遠点での展開式の係数とモンスターの既約表現の次数との関係が注目され始めたのである．

H を虚数部分が正である複素数の集合，すなわち，

$$H=\{z\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Im}(z)>0\}$$

とする．$q=e^{2\pi iz}$, $z\in H$ とおき，

$$\Delta(z)=q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}$$

と定義する．L を E_8 型の単純リー代数のルート格子の3個の直和として，その L のテータ関数を

$$\Theta_L(z)=\sum_{\alpha\in L}q^{\langle\alpha,\alpha\rangle/2}$$

と書くとき，

$$j(z)=\Theta_L(z)/\Delta(z)$$

と定義されるものが j 関数である．

$$SL(2,\mathbb{Z})=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, a,b,c,d\in\mathbb{Z},\ ad-bc=1\right\}$$

とし，

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in SL(2,\mathbb{Z})$$

の H 上の作用を

$$Az=\frac{az+b}{cz+d}$$

と定義すると，

$$j(Az)=j(z)$$

が $SL(2,\mathbb{Z})$ のすべての元 A について成立している．それゆえ $j(z)$ は H の $SL(2,\mathbb{Z})$ による剰余空間

$$SL(2,\mathbb{Z})\backslash H$$

の上の関数とみなすことができる．$SL(2,\mathbb{Z})\backslash H$ は無限遠点 $z=i\infty$ でコンパクト化することにより，閉じたリーマン（G. F. B. Riemann）面$R=SL(2,\mathbb{Z})\backslash H^*$（右肩に * を付けて剰余空間のコンパクト化を表わすことにする）となる．このリーマン面 R 上で有理型な関数全体からなる体 $k(R)$ は，複素数体 $\mathbb{C}$ の上に 1 つの元から生成されている．$k(R)$ はいわゆる有理関数体である．その 1 つの生成元として $j(z)$ をとることができる．リーマン面 R の $z=i\infty$ の近傍での局所座標は $q=e^{2\pi iz}$, $z\in H$ にとることができる．$z\to i\infty$ のときは当然 $q\to 0$ となっている．$z=i\infty$ の近傍で $j(z)$ を q のベキで展開すると，

$$\begin{aligned} j(z)&=\frac{1}{q}+744+\sum_{n=1}^{\infty}c(n)q^n \\ &=\frac{1}{q}+744+196884q+\cdots \end{aligned}$$

となっている．すなわち，$c(1)$ はモンスターの単位表現の次数 1 とその次に小さい既約表現の次数 196883 との和になっている．$c(2),c(3)$ 等に対しても同様な状況が成立しているのだろうか．モンスターの既約表現の次数 $\{d_i\}_{i=0}^{193}$ と $c(n)$ を小さい方から数個あげると，

$$
\begin{array}{ll}
d_0 = 1 & \\
d_1 = 196883 & c(1) = 196884 \\
d_2 = 21296876 & c(2) = 21493760 \\
d_3 = 842609326 & c(3) = 864299970 \\
d_4 = 18538750076 & c(4) = 20245856256
\end{array}
$$

となっている．これらの数により

$$
\begin{aligned}
c(1) &= d_0 + d_1 \\
c(2) &= d_0 + d_1 + d_2 \\
c(3) &= 2d_0 + 2d_1 + d_2 + d_3 \\
c(4) &= 2d_0 + 3d_1 + 2d_2 + d_3 + d_5
\end{aligned}
$$

となっていることがわかる．偶然にしてはできすぎているようである．ともかく考えている数がすべて大きいのである．（モンスターの既約表現の次数の表は付録 2 を参照.） 一方，偶然でないとすると，どんな数学的事象がその背後にあるだろうか．神秘性を増すためにもう少し数を並べよう．

$$
\begin{array}{ll}
d_5 = 19360062527 & c(5) = 333202640600 \\
d_6 = 293553734298 & c(6) = 4252023300096 \\
d_7 = 3879214937598 & c(7) = 44656994071935 \\
d_8 = 36173193327999 & c(8) = 401490886656000 \\
d_9 = 125510727015275 & c(9) = 3176440229784420 \\
d_{10} = 190292345709543 & \\
d_{11} = 222879856734249 & \\
d_{12} = 1044868466775133 & \\
d_{13} = 1109944460516150 & \\
d_{14} = 2374124840062976 &
\end{array}
$$

となっている．これらの数により

$$
\begin{aligned}
c(5) &= 4d_0 + 5d_1 + 3d_2 + 2d_3 + d_4 + d_5 + d_6 \\
c(6) &= 4d_0 + 7d_1 + 5d_2 + 3d_3 + d_4 + 3d_5 + d_6 + d_7 \\
c(7) &= 7d_0 + 11d_1 + 7d_2 + 6d_3 + 3d_4 + 4d_5 + 2d_6 + 2d_7 + d_8 \\
c(8) &= 8d_0 + 15d_1 + 12d_2 + 8d_3 + 4d_4 + 8d_5 + 4d_6 + 4d_7 + d_8 \\
&\quad + d_9 + d_{11}
\end{aligned}
$$

$$c(9) = 12d_0 + 23d_1 + 16d_2 + 14d_3 + 8d_4 + 12d_5 + 7d_6 + 7d_7 \\ +3d_8 + 2d_9 + d_{10} + d_{11} + d_{14}$$

となっていることがわかる.

上で示したように $n \leqq 4$ の範囲では $c(n)$ がモンスターの表現の次数になっていて, $n \leqq 9$ のときにも多少複雑にはなるものの, $c(n)$ はやはりモンスターの既約表現の次数の和に書けている. もちろん, $c(n)$ は単位表現の次数 1 の $c(n)$ 倍とすればいつでも自明なものが存在するわけであるが, 既約成分の重複度をできるだけ小さくするとの仮定のもとには, $c(n)$ は $n \leqq 9$ の範囲ではほぼ唯一の方法でしか既約表現の次数の和に分解できないのである.

背後にある数学的事象を発見しようと思えばまず, 各 n について, 次数が $c(n)$ のモンスターの加群 $V(n)$ を構成しなくてはならない.

$$j(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} \dim V(n) q^n$$

となっているはずだから, 無限個の $V(n)$ の直和

$$V = \coprod_{n=-1}^{\infty} V(n)$$

を考えるべきだろう. しかし, これだけでは条件が不足しているであろう. 例えば, $c(1) = 196884 = 1 + 196883$ のように分解しているはずだがその強制力はどこから来るのだろうか. モンスターの各元 g に対して, g の $V(n)$ における指標の値がわかっていれば, 各 n に対して $V(n)$ の既約成分への分解が決まる. その逆ももちろん成立している. このようにして, 各 n , 各 $g \in M$ に対して g の $V(n)$ における指標を前もって与えてやればよいとわかる. 問題はその与え方である.

最初の加群 $V(-1)$ の次元は $j(z)$ の q^{-1} の係数であるから 1 である. モンスターは単純群であるから, 表現 $V(-1)$ は, 当然, 単位表現である. $V(0)$ は $j(z)$ をそのまま使うと, $\dim V(0) = 744$ である. $j(z)$ は

$$j(z) = \frac{\Theta_L(z)}{\Delta(z)}$$

として与えた. L は E_8 型のルート格子の 3 つの直和であったが, L として

階数 24 の他の正値ユニモジュラー格子としてみよう．例えば，L としてリーチ格子 Λ をとって

$$\frac{\Theta_L(z)}{\Delta(z)}$$

を計算すると，$j(z)$ の定数部分だけが変わって 24 となり，残りの係数は変わらない．このように $j(z)$ の定数部分には唯一性が少ないと見て，

$$J(z)=j(z)-744$$

と定義し，それに応じて $V(0)=0$ とおく．$V=\coprod_{n=-1}^{\infty}V(n)$ が構成されたとし，g をモンスターの元として，

$$J_g(z)=\sum_{i=-1}^{\infty}\mathrm{Tr}(g|_{V(i)})q^i$$

とおく．g が単位元のときの $J_1(z)$ が $J(z)$ となっているのである．

$J_1(z)$ は $SL(2,\mathbb{Z})$ 不変で，しかも $J_1(z)$ はリーマン面 $R_1=SL(2,\mathbb{Z})\backslash H^*$ の有理型関数体の生成元である．モンスターの単位元でない元 g に対しても同様な性質を要求することにしよう．つまり，g に対して $SL(2,\mathbb{R})$ の**不連続部分群** Γ_g が存在して，剰余空間 $\Gamma_g\backslash H$ のコンパクト化 $R_g=\Gamma_g\backslash H^*$ が種数 0 のリーマン面となっていて，$J_g(z)$ が R_g の有理型関数体の生成元になっていると要求するのである．感覚的にはとても強い条件に思われる．$J_g(z)$ はその定義からモンスターの共役類の上の関数であるが，全部で 194 個あるモンスターの共役類に対して一斉に成立するようなモンスター加群 $V(n)$ の直和 $V=\coprod_{n=-1}^{\infty}V(n)$ が存在するのだろうか．いずれにしても，もしそんなことが実際に成立しているならば，モンスター加群 $V(n)$ とその直和 $V=\coprod_{n=-1}^{\infty}V(n)$ に対して強い主張が成立しているはずであるし，そうであれば，$V(i)$ の既約表現への分解を $n\leqq 9$ の場合に書きあげたように，重複度の小さい「自然」なものになっていてもよいというわけである．以下，そのマッカイ（J. McKay）・トンプソン予想を数学的に述べる．

マッカイ・トンプソン予想（1979）

（a）単純群モンスターが作用する加群 $V(n)$ が各 $n\geqq -1$ に対して存在し，$V(0)=0$ で，$\sum_{n=-1}^{\infty}\dim V(n)q^n=j(z)-744=J(z)$ となっている．

(b) モンスターの各元 g に対して，$SL(2,\mathbb{R})$ の不連続部分群 Γ_g が存在して，剰余空間 $\Gamma_g\backslash H$ のコンパクト化 R_g は種数 0 のリーマン面となり，

$$J_g(z)=\sum_{i=-1}^{\infty}\mathrm{Tr}(g|_{V(i)})q^i$$

は R_g の有理型関数体の $\mathbb{C}$ 上の生成元となる． ∎

上に予想した $J_g(z)$ をモンスターの元 g に付随した**マッカイ・トンプソン級数**という．今まで不連続部分群を定義しなかったが位相群 $SL(2,\mathbb{R})$ の部分群でディスクリート (discrete) であるものをいう (次の節でもう少し使いやすい定義を与える)．Γ_g が手がつけられないほど任意なものであっても意味はないだろう．それゆえ不連続部分群 Γ_g の形をもう少し精密に予想すべきである．群の指標は 1 のベキ根の和からできているのだから，Γ_g は数論的な不連続部分群と予想するのが賢明であろう．そこで，N をある自然数とするとき，

$$\Gamma_0(N)=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in SL(2,\mathbb{Z})\;\middle|\; c\equiv 0 \pmod N\right\}$$

と定義する．$SL(2,\mathbb{R})$ の不連続部分群 Γ がある N に対して

$$\Gamma\supset\Gamma_0(N)$$

となっているとき，Γ を**合同群**と呼び，そのような最小の N を Γ のレベルと呼ぶ．さらに，$V(-1)$ は単位表現であったから

$$J_g(z)=\frac{1}{q}+\cdots$$

と書けていて，しかも $J_g(z)$ はリーマン面 R_g の関数体の生成元となっているのだから，$z=i\infty$ を固定する元全体からなる Γ_g の部分群は

$$\pm\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で生成されている．そのような Γ_g の性質も上に述べたマッカイ・トンプソン予想では，(証明できない場合は) 暗黙の了解事項となっている．要は「意味ある」ものを探すということである．

4.2 コンウェイ・ノートン予想/保型関数

前節でモンスターの既約表現と保型関数の無限遠点での展開係数とに関する現象をマッカイ・トンプソン予想という形で述べた．この予想が出されて間もなく，コンウェイとノートン(S. P. Norton)は，モンスターの各元 g に対して不連続群 Γ_g と保型関数 $J_g(z)$ を具体的に構成し，対応するリーマン面 R_g の種数は0であること，R_g の有理型関数体の生成元として $J_g(z)$ がとれること，$J_g(z)$ の無限遠点 $z=i\infty$ における展開は

$$J_g(z)=\frac{1}{q}+\sum_{n=1}^{\infty}c_g(n)q^n$$

と書け，さらに $n\leqq 9$ のときはモンスター $\mathbb{M}$ から複素数 $\mathbb{C}$ への関数

$$\mathbb{M}\ni g\to c_g(n)$$

は $\mathbb{M}$ の指標になっているということを示し，さらにすべての n に対して上の写像は $\mathbb{M}$ の指標になっているであろうと予想した．（ここの $J_g(z)$ はまだ表現から来ているとわかっているわけではないのでコンウェイ・ノートンの論文にあるように $t_g(z)$ とでもするべきであろうが，最後には $J_g(z)=t_g(z)$ と言えるので先回りして $J_g(z)$ を使うことにする.）

これを**コンウェイ・ノートン予想**と言う．この節はその予想を理解するための準備をする．主な部分は保型関数論からの抜粋である．

$GL(2,\mathbb{R})$，$SL(2,\mathbb{R})$，$SL(2,\mathbb{Z})$ 等の群，そして，それらの剰余群である $PGL(2,\mathbb{R})$，$PSL(2,\mathbb{R})$，$PSL(2,\mathbb{Z})$ は既知であろう．$GL^+(2,\mathbb{R})$ のように + 符号をつけたものは，行列式が正という意味であり，$PGL^+(2,\mathbb{R})$ は対応する剰余群である．

1次元射影複素直線 $\mathbb{P}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ はリーマン球と呼ばれ，リーマン面のもっとも簡単なものである．$GL(2,\mathbb{R})$ の $\mathbb{P}$ 上の作用を，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z=\frac{az+b}{cz+d},\quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in GL(2,\mathbb{R})$$

とする．$z=\infty$ のときや，$cz+d=0$ となるときの $\dfrac{az+b}{cz+d}$ の値は数学的常識に従う．

$$\mathrm{Im}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z\right) = \frac{(ad-bc)\,\mathrm{Im}\, z}{||cz+d||^2}$$

となっているので，上半平面 H を

$$H=\{z\in\mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z)>0\}$$

で定義すると，$GL(2,\mathbb{R})^+$ は H の上に作用する．$GL(2,\mathbb{R})$ には R^4 の部分空間としての位相が入っている．$SL(2,\mathbb{R})$ は $GL(2,\mathbb{R})$ の部分群として位相群である．

$GL^+(2,\mathbb{R})$ は H に作用しているが，忠実な作用は $PGL^+(2,\mathbb{R})$ を通して行われ，しかも

$$PGL^+(2,\mathbb{R})\equiv PSL(2,\mathbb{R}) \pmod{Z(GL(2,\mathbb{R}))}$$

なので，H 上への作用としては，$SL(2,\mathbb{R})$，または，対応する $PSL(2,\mathbb{R})$ を考えれば十分である．$SL(2,\mathbb{R})$ の部分群 Γ をとり，剰余空間 $\Gamma\backslash H$ を考える．H 上の関数で Γ で不変になっているものを考えたいのである．$g\in SL(2,\mathbb{R})$ とし，$f(z)$ を H 上の関数とするとき，$f(gz)=f(z)$ がすべての $z\in H$ に成立しているとき，$f(z)$ を g 不変と言う．同様に，$SL(2,\mathbb{R})$ の部分群 Γ に対して，$f(z)$ が Γ 不変という意味も明白であろう．

H 上の関数 $f(z)$ が $SL(2,\mathbb{R})$ のある部分群 Γ に関して不変であれば，$f(z)$ は $\Gamma\backslash H$ 上の関数と見ることができる．そのような $f(z)$ の性質を知るためには，$\Gamma\backslash H$ 上の関数族の性質を知る必要がある．数学的対象である集合 X を研究するにはその上の置換（自己同型）を考えるのがよい．そして置換を考えるなら，それら置換の集合である置換群を考えるとさらによい．X の構造とともに考えれば置換群は自己同型群となる．

同様にして，剰余空間 $\Gamma\backslash H$ の上の関数のある集合 $k(\Gamma\backslash H)$ を考えてみる．$k(\Gamma\backslash H)$ としては，それが与えられると剰余空間の構造がただ1つに定まるようなできるだけ小さいものが望ましい．そのような考察から，$\Gamma\backslash H$ をコンパクト化して閉リーマン面を作り，そしてそのリーマン面の有理型関数だけ

からなる関数体を考えることになる．それを可能にするのが，$SL(2,\mathbb{R})$ の不連続部分群というものである．$SL(2,\mathbb{R})$ の部分群 Γ が，H の任意の開集合 U に対して Γ の部分集合

$$\{g\in\Gamma\,|\,gU\cap U\neq\phi\}$$

が有限集合になる，という条件を満たすとき，Γ を $SL(2,\mathbb{R})$ の不連続部分群であるという．H の任意の点 z をとるとき，gz と z が近くに存在することはあまり起こらないということである．特に，$z\in H$ のとき，

$$\{g\in\Gamma\,|\,gz=z\}$$

は有限集合である．z の近傍 U_z を十分小さくとれば，次のことが成立していることもわかる．

「z を任意の H の元とするとき，z の近傍 U_z が存在して $gU_z\cap U_z=\phi$，または $gz=z$，がすべての $g\in\Gamma$ に対して成立する．」

このことにより，

「有限または無限個の領域の集合で H を埋め尽くし，そしてその領域の集合は Γ の作用で互いに境界以外は共通部分を持たないようにできる」

という描像を持つことができる．それをきちんと言うためには H に距離の概念を入れる必要がある．

線分 $[0,1]\subset\mathbb{R}$ から H への連続写像 $\phi(t)$ で有限個の $t\in[0,1]$ を除いて微分可能なものを H の曲線と言う．ϕ の像 $C=\phi([0,1])$ も曲線と言う．C を H の曲線とするとき，

$$l(C)=\int_0^1\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,\frac{dt}{y},\quad \phi(t)=x(t)+y(t)i$$

で C の長さを定義する．$l(C)$ は写像 $\phi:[0,1]\to H$ によらず，その像 $C=\phi([0,1])$ のみに依存する．次に H の 2 点間の距離を定義しよう．$z_1, z_2\in H$ のとき，

$$d(z_1,z_2)=\inf\{l(C)\,|\,C \text{ は } z_1 \text{ と } z_2 \text{ を結ぶすべての曲線を動く}\}$$

を 2 点間 z_1, z_2 の距離という．$\dfrac{dt}{y}$ を測度にとってあるので，

$$d(gz_1, gz_2) = d(z_1, z_2)$$

がすべての $g \in SL(2,\mathbb{R})$ の元に対して言えるのである．

z_1, z_2 を H の 任意の 2 つの点とするとき，$gz_1 = z_2$ となる $SL(2,\mathbb{R})$ の元 g が存在する．すなわち，$SL(2,\mathbb{R})$ は H 上可移である．$gz_1 = i$ となる $g \in SL(2,\mathbb{R})$ も存在する．さらに，g を適当に選ぶと，$gz_2 \in i\mathbb{R} = \{ir \mid r \in \mathbb{R}\}$ とすることもできる．すなわち，

$$gz_2 = i\lambda$$

となる $\lambda > 0$ が存在する．i と $i\lambda$ を結ぶ（虚軸上の）線分が $d(i, i\lambda)$ を与える曲線である．$d(i, i\lambda) = |\log \lambda|$ も容易である．よって，$d(z_1, z_2) = |\log \lambda|$ となる．i と $i\lambda$ を結ぶ線分は i と $i\lambda$ を結ぶ測地線と言われ，対応して，z_1 と z_2 を結ぶ測地線は，$g^{-1}([i, i\lambda])$ である．

「Γ を $SL(2,\mathbb{R})$ の不連続部分群とするとき，H は互いに境界以外は共通部分のない領域の族に分割され，その領域の族が Γ の元で移り合っている」

というような描像を得られると述べたが，距離という概念を得たのでそれを使ってそのことを明確にしよう．

不連続部分群 Γ の単位元でない元で固定される H の元があるとすると，上記の描像になんらかの支障をきたしそうである．実際，

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

は i を固定する．

定義 H の点 z で $g(\neq \pm I) \in \Gamma$ が存在して $gz = z$ となっているとき z を Γ の**惰円点**という．Γ が 不連続群のときは $gz = z$ となっている $g \in \Gamma$ 全体は有限（巡回）群である． ∎

$$J = \{z \in H \mid \exists g(\neq \pm I) \in \Gamma,\ gz = z\}$$

を惰円点全体の集合とする．J が集積点 t を持つとしよう．不連続群の定義から，t の近傍 T があって，

$$gT \cap T = \phi \quad \text{または} \quad gt = t$$

が成立する．t は集積点であるから，$t \neq t_1 \in T$，$1 \neq g_1 \in \Gamma$ が存在して，$g_1 t_1 = t_1$ となる．ゆえに，元 g_1 は t と t_1 を固定する．$SL(2, \mathbb{R})$ の元の H 上の作用

$$z \longrightarrow \frac{az+b}{cz+d}$$

を思い起こせば，$g_1 = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ に限る．これは矛盾である．よって，J は H のディスクリートな部分集合である．特に，J は H 全体ではない．H の元 z_0 を適当に選べば，z_0 は $\pm I$ 以外の Γ の元では固定されない．そのような $z_0 \in H$ に対して

$$D = \{z \in H \mid d(z, z_0) \leqq d(z, gz_0),\ \forall g \in \Gamma\}$$

とおく．H の元 z_0 は Γ の元の作用で，H 上の軌道 Γz_0 を動くわけだが，いかなる $gz_0 \neq z_0$ よりも z_0 に近い点 z 全体が D である（境界があるので少し不正確な言い方だったが）．D は Γ の**基本領域**と呼ばれている．基本領域 D には次の性質がある．

（1）$H = \bigcup_{g \in \Gamma} gD$ であり，D° を D の内点の集合とするとき，その閉包 $\overline{D^\circ} = D$ で $gD^\circ \cap D^\circ = \phi$ が Γ の $\pm I$ 以外のすべての元 g に対して成立している．

（2）D は（有限または無限個の）測地線で囲まれた多角形である．特に D は連結である．

（3）C を H の任意のコンパクト集合とするとき，C は D の辺となっている測地線の有限個とだけ交わる．

例をあげよう．

$$\Gamma^1 = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

と定義すると，Γ^1 は不連続群であって，その基本領域 D_1 は図 4.1 のようになる．

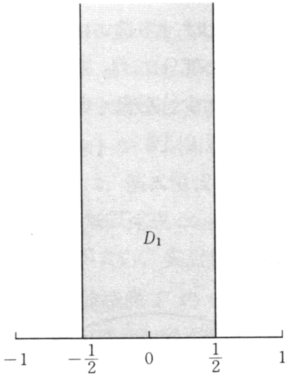


図 4. 1

D_1 を定義する z_0 としては虚軸上の任意の点でよい．最も基本的な不連続群 $SL(2,\mathbb{Z})$ の基本領域 D_2 は図 4. 2 のようになる．

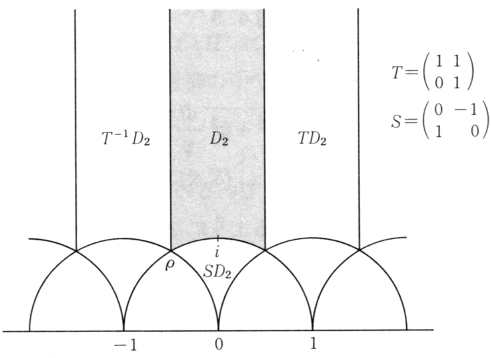


図 4. 2

この例では，$z_0=2i$ である．すなわち，

$$D_2=\{z\in H : d(z,2i)\leqq d(z,g(2i)),\ \forall g\in SL(2,\mathbb{Z})\}$$

である．

D_1 と D_2 は見かけの大きさにはあまり違いはない．しかし群指数 $[SL(2,\mathbb{Z}):\Gamma^1]=\infty$ である．実は D_2 の下の部分に D_2 と $SL(2,\mathbb{Z})$ の元で移り合う領域が無限に入っている．そのうちの少しを書くと図 **4. 3** のようになる．

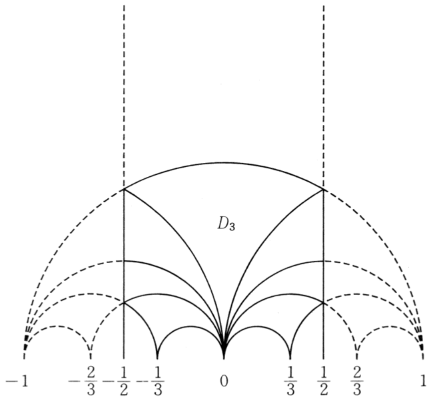


図 **4. 3**

長さが，

$$\int\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,\frac{dt}{y}$$

で定義されているのだが，$\dfrac{1}{y}$ が入っているので，実軸に近づくほど，y についての動きが少なくても，距離があるようになっているのである．

H の領域 D の面積 $A(D)$ を次の式で定義する．

$$A(D)=\int\int_D\frac{dxdy}{y^2}$$

直接に計算すれば，$A(D_1)=\infty$，$A(D_2)=\pi/3$ となる．不連続群 Γ^1 はおもしろいことを提供してくれそうにもない．

基本領域の面積が有限となる不連続群は**第一種**と呼ばれる．今後，Γ を第一種の不連続群とする．D をその基本領域とするとき，D は実軸とある長さを持って接することはない．ただし，D の一部が尖って，実軸の方へ限りなく近づいていることは起こる．その伸びた先の実数のことを Γ の**尖点**という．

$\Gamma=SL(2,\mathbb{Z})$ で基本領域を図 4.3 の D_3 のようにとれば，原点 O が Γ の尖点である．D_2 には尖点はないが，$t=i\infty$ が O と $SL(2,\mathbb{Z})$ で同値であるので $i\infty$ も尖点という．すなわち，O に $SL(2,\mathbb{Z})$ 同値になる点はすべて $SL(2,\mathbb{Z})$ の尖点である．よって，$\mathbb{Q}\cup\{\infty\}$ が $SL(2,\mathbb{Z})$ の尖点の集合となる．∞ でなく $i\infty$ という記法が使われるのは，基本領域は D_2 のように虚軸を含むように選ばれることが多く，その中の無限遠点 ∞ は，そこでの局所座標を $q=e^{2\pi z}$ に選ぶと，∞ よりも $i\infty$ の方がよい．尖点を正式に定義する．

定義 $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ の点 x で不連続群 Γ の $\pm I$ でない元で固定されるものを Γ の**尖点**という．尖点 x の固定群は無限（巡回）群となる． ▮

商空間 $\Gamma\backslash H$ は基本領域 D の境界を Γ の作用で同一視したものである．それはいくつかの穴の開いたドーナツ状になっているのであるが，楕円点では，先端の角度が 0 でないコーン状になっている．一方，尖点では，先細りで，先端の角度が 0 のコーン状になっている．しかも先端は $\Gamma\backslash H$ に属していない．しかし，楕円点，尖点のどちらにも局所座標を導入してその近傍と全体をなめらかにつなぐことができる．すなわち，H だけではなく H と Γ の尖点の集合の和集合を Γ で割った空間 $\Gamma\backslash H^*$ には閉リーマン面の構造が入る．

次に，$SL(2,\mathbb{Z})$ の不連続部分群の中でも数論でよく使われる合同部分群を定義しよう．N を自然数とする．

$$\Gamma_0(N)=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in SL(2,\mathbb{Z})\,\middle|\, c\equiv 0 \pmod N\right\}$$

$$\Gamma_1(N)=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in SL(2,\mathbb{Z})\,\middle|\, c\equiv 0,\ a\equiv d\equiv 1 \pmod N\right\}$$

$$\Gamma(N)=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in SL(2,\mathbb{Z})\,\middle|\, b\equiv c\equiv 0,\ a\equiv d\equiv 1 \pmod N\right\}$$

$\Gamma_0(N)\supset\Gamma_1(N)\supset\Gamma(N)$ となっており，$\Gamma(N)$ は $SL(2,\mathbb{Z})$ の正規部分群である．N を素数 p とすると，それらの群はよく見える．すなわち，剰余群 $SL(2,\mathbb{Z})/\Gamma(p)$ は有限体 F_p を係数とする 2 行 2 列の行列とみることができ，

$$SL(2,\mathbb{Z})/\Gamma(p)\cong SL(2,p)$$

である．$\Gamma_1(p)$ は b の位置だけが任意なのだから，$\Gamma_1(p)/\Gamma(p)$ は位数 p で，$SL(2,p)$ のシロー p 部分群である．同じようにして，$\Gamma_0(p)/\Gamma(p)$ は，$SL(2,p)$ のシロー p 部分群の正規化群となることがわかる．

コンウェイ・ノートン予想には合同群の 1 つである $\Gamma_0(N)$ とその $SL(2,\mathbb{R})$ の中の正規化群が重要な役割をする．$\Gamma_0(N)$ の記述は明白だが，その正規化群の構造はやや複雑である．実際に必要なのはその特別な部分群なので，それだけを以下記述する．

r,s を自然数とするとき，$r|s$ で $\gcd\left(r,\dfrac{s}{r}\right)=1$ のとき $r\|s$ と書こう．与えられた正整数 N に対して，$e\|N$ を選び，

$$\omega_e=\begin{pmatrix} ae & b \\ cN & de \end{pmatrix},\quad a,b,c,d\in\mathbb{Z},\quad \det(\omega_e)=e$$

という行列を定義する．$GL^+(2,\mathbb{R})$ の中心 Z を法として

$$\omega_e^{-1}\Gamma_0(N)\omega_e\equiv\Gamma_0(N)$$

であり，

$$\omega_e^2\in\Gamma_0(N)Z$$

となる．ω_e は**アトキン・レーナー**（A. O. L. Atkin - J. Lehner）**インボルーション**と呼ばれている．さらに，$f\|N$ とすると，

$$\omega_e\omega_f\equiv\omega_g,\qquad g=\frac{ef}{(e,f)^2}$$

が成立している．N を素因数分解して，$N=\prod_{i=1}^{s}p_i^{e_i}$ とすれば，

$$\omega_i=\omega_{p_i^{e_i}}\qquad(i=1,2,\cdots,s)$$

という s 個の独立なアトキン・レーナーインボルーションを得る．$\Gamma_0(N)+$ を，$\Gamma_0(N)$ にすべての可能なアトキン・レーナーインボルーションをつけ加えた群とすると，$\overline{\Gamma_0(N)+}/\overline{\Gamma_0(N)}$ は位数 2^s の初等可換群となる．ここで $\overline{\Gamma}$ などは $GL^+(2,\mathbb{R})$ の中心 Z を法とした剰余群である．

閉リーマン面には種数の概念がある．$\Gamma_0(N)\backslash H^*$ の種数 $g_0(N)$ は次の公式で計算される．

$$g_0(N)=1+\frac{\mu(N)}{12}-\frac{\nu_2(N)}{4}-\frac{\nu_3(N)}{3}-\frac{\sigma(N)}{2}$$

$$\mu(N)=N\prod_{p|N}\left(1+\frac{1}{p}\right) \qquad (p\text{ は素数})$$

$$\nu_2(N)=\begin{cases} 0 & (4|N\text{ のとき}) \\ \prod_{p|N}\left(1+\left(\frac{-1}{p}\right)\right) & (\text{その他のとき}) \end{cases}$$

$$\nu_3(N)=\begin{cases} 0 & (9|N\text{ のとき}) \\ \prod_{p|N}\left(1+\left(\frac{-3}{p}\right)\right) & (\text{その他のとき}) \end{cases}$$

$$\sigma(N)=\sum_{d|N}\phi\left(\left(d,\frac{N}{d}\right)\right) \qquad (\phi\text{ はオイラー関数})$$

ここで $\left(\frac{\cdot}{\cdot}\right)$ は次のように定義される．

$$\left(\frac{-1}{p}\right)=\begin{cases} 0 & p=2\text{ のとき}, \\ 1 & p\equiv 1 \pmod 4\text{ のとき}, \\ -1 & p\equiv 3 \pmod 4\text{ のとき}, \end{cases}$$

$$\left(\frac{-3}{p}\right)=\begin{cases} 0 & p=3\text{ のとき}, \\ 1 & p\equiv 1 \pmod 3\text{ のとき}, \\ -1 & p\equiv 2 \pmod 3\text{ のとき}, \end{cases}$$

「N が大きくなれば，群 $\Gamma_0(N)$ は小さくなる」ことに呼応して，リーマン面 $\Gamma_0(N)\backslash H^*$ の構造は複雑になっていることは予想できる．種数 0 のリーマン面が最も簡単なものだから $\Gamma_0(N)\backslash H^*$ の種数 0 となるような N には上限があると思われる．実際そうなるのは $N=1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,12,13,16,18,25$ のときに限る．一般に $\Gamma_1\supset\Gamma_2$ を 2 つの第一種の不連続群とし，それぞれのリーマン面 $\Gamma_1\backslash H^*, \Gamma_2\backslash H^*$ の種数を g_1, g_2 とするとき，$g_1\leqq g_2$ が成立する．$\Gamma_0(N)$ とその $GL^+(2,\mathbb{R})$ における正規化群の部分群 $\Gamma\supset\Gamma_0(N)$ が我々にとって重要な群であったが，上に述べたことより $g(\Gamma)\leqq g(\Gamma_0(N))$ となる．ゆえに，25 より大きい N に対しても $g(\Gamma)=0$ となり得る．実際，$\Gamma_0(119)$ とそのアトキン・レーナーインボルーション ω_7 と ω_{17} で生成された群 Γ の種数 $g(N)$ は 0 となる．

部分群　$\boldsymbol{n|h+e+f\cdots}$

コンウェイとノートンは全部で 171 個の異なった不連続群 Γ_g と対応する保型関数 $J_g(z)$ を構成したが，そのためには $\Gamma_0(N)$ とその正規化群の部分群だけでなく，

$$n|h+e+f\cdots$$

と記号的に書かれる群をも必要とした．以下それを略述する．

N, h を正整数で，$h^2|N, h|24$ となっているとしよう．さらに，$n=\dfrac{N}{h}$ とおく．n は正整数である．

$SL(2,\mathbb{R})$ の部分群 $\Gamma_0(n|h)$ を次のように定義しよう．

$$\begin{aligned}\Gamma_0(n|h) &= \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \Gamma_0\left(\frac{n}{h}\right)\begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \left\{\begin{pmatrix} a & b/h \\ cn & d \end{pmatrix} \,\middle|\, a,b,c,d\in\mathbb{Z},\ ad-\frac{bcn}{h}=1\right\}\end{aligned}$$

24 という数が突然出てきたが，次の 2 条件（1）（2）は同値となる．

（1）整数 a,b に対して $ad\equiv 1 \pmod{n}$ と $a\equiv d \pmod{n}$ は同値である．

（2）n は 24 の約数である．

$24=8\cdot 3$ であるが環 $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ も $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ もその乗法群は基本アーベル群になっているので上の事実が成立するのである．24 より大きい数では成立しない．それを使うと群 $\Gamma_0(n|h)$ が $\Gamma_0(N)$ の $SL(2,\mathbb{R})$ での正規化群の部分群となっていることが言える．記号の簡易化のため，コンウェイ・ノートンに従って

$$n := \Gamma_0(n)$$

$$n+e_1, e_2, \cdots, e_k := \langle \Gamma_0(n), \omega_{e_1}, \omega_{e_2}, \cdots, \omega_{e_k}\rangle$$

$$n|h := \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \Gamma_0\left(\frac{n}{h}\right)\begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$n|h+e_1, e_2, \cdots, e_k := \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \left\langle \Gamma_0\left(\frac{n}{h}\right), \omega_{e_1}, \omega_{e_2}, \cdots, \omega_{e_k}\right\rangle \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と書くことにする．ここで，$\omega_{e_1}, \omega_{e_2}, \cdots, \omega_{e_k}$ は，$\Gamma_0(n)$ または $\Gamma_0\left(\dfrac{n}{h}\right)$ のアトキン・レーナーインボルーションである．

$H=\{z\in\mathbb{C}\,|\,\mathrm{Im}(z)>0\}$ の元 z に対して

$$\eta(z)=e^{\pi iz/12}\prod_{n=1}^{\infty}(1-e^{2\pi inz})=q^{1/24}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n),\quad q=e^{2\pi iz}$$

とおいて，$\eta(z)$ を**デデキント**(J. W. R. Dedekind)**のエータ関数**と呼ぶ．関数と言ってよいかが，まず問題となるが，

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\cdots=\prod_{i=1}^{\infty}(1+a_i)$$

のような無限積は，通常の無限級数で部分和を考えるように，部分積

$$P_n=(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)$$

を考える．$P=\lim_{n\to\infty}P_n$ が存在して，それが 0 でないとき，上記の無限積は収束すると言う．

定理　無限積 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ は，$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ が収束するときに限って収束する．

∎

任意の n に対して，$a_n=-\dfrac{1}{2}$ とすると，無限積 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ は 0 に近づく．しかし，$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{1}{2}\right|$ は収束しない．上記の定理が成立するためには，このような無限積は収束しないと定義する必要がある．

定理　関数の集合 $\{f_n(z)\,|\,n\in\mathbb{N},\ z\in\mathbb{C}\}$ と，コンパクトな領域 K に対して次の 2 条件は同値である．

(a) 無限積 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n(z))$ は K 上一様収束する．

(b) 無限和 $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(z)|$ は K 上一様収束する． ∎

無限和

$$\sum_{n=1}^{\infty}e^{2\pi inz}$$

が H のコンパクトな領域で絶対一様収束することは容易にわかるのでデデキントのエータ関数

$$\eta(z)=q^{1/24}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)$$

は収束する．$\eta(z)$ が正則関数であることも部分積

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} (1 - e^{2\pi ikz})$$

が正則関数であることと，$\lim_{n \to \infty} P_n$ が一様収束であることよりわかる．まとめると，

定理 デデキントのエータ関数 $\eta(z)$ は上半平面 H 上で正則で 0 とはならない． ∎

エータ関数の変換公式は重要であり，次の形をとる．

$$\eta(z+1) = e^{\pi i/12}\eta(z)$$

$$\eta\left(-\frac{1}{z}\right) = e^{-\pi i/4} z^{1/2} \eta(z)$$

ただし，ここで r を実数とするとき，

$$z^r = |z|^r e^{ir \arg(z)} \qquad (-\pi < \arg(z) \leqq \pi)$$

と定める．もう少し一般に

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$$

とするとき，

$$\eta(Az) = \nu_\eta(A)(cz+d)^{1/2}\eta(z)$$

となり，$\nu_\eta(A)$ もきちんと計算可能な 1 の 24 乗根になる．上に掲げた

$$\eta\left(-\frac{1}{z}\right) = e^{-\pi i/4} z^{1/2} \eta(z)$$

はエータ関数の定義

$$\eta(z) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)$$

から少しくらい変形するのでは証明できない．

散在型単純群の中で位数が最大の群モンスターと保型関数との関係を第 1 節で述べた．おもしろい例が他にもいろいろあるというわけではないが，設定そのものは任意の有限群でできるので，それを述べよう．まず，必要な保型関数（モデュラー関数）の集合 $\mathfrak{F}$ を定義する．保型関数とは上半平面 H 上定義

され，ある不連続群 Γ の元に対して不変であって，H と Γ の尖点のすべてにおいて有理型となる関数である．さて，$\mathfrak{F}$ は保型関数 $f(z)$ であって，次の条件を満たすものの集合である．

（1）$f(z)$ はある $\Gamma_0(N)$ を含むような $SL(2,\mathbb{R})$ の不連続部分群に関する保型関数である

（2）リーマン面 $\Gamma\backslash H^*$ の種数は 0 であり，その関数体は $\mathbb{C}$ 上，$f(z)$ で生成される．

（3）$z=i\infty$ の近傍で $f(z)$ は，

$$f(z)=\frac{1}{q}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nq^n, \quad q=e^{2\pi iz}, \ a_n\in\mathbb{C}$$

と展開される．

G を有限群とし，G と，G から $\mathfrak{F}$ への写像 ϕ の組 (G,ϕ) で，

$$\phi_g(z)=\frac{1}{q}+\sum_{n=0}^{\infty}a_g(n)q^n$$

と $\phi_g\in\mathfrak{F}$ を $z=i\infty$ の近傍で展開するとき，各 n に対して関数 $a_n(g), g\in G$ が G の表現の指標となっているものを G の**ムーンシャイン**と呼ぶ．

$\mathfrak{F}$ に属する関数としては，

$$f(z)=\frac{\eta(2z)^3\eta(3z)^9}{\eta(z)^3\eta(6z)^9}$$

のように，デデキントのエータ関数の簡単な変数変換から作られるものの積となっているものが多く作られる．そのような $f(z)$ を**エータ積**と呼ぶ．上記の例は $\Gamma=\Gamma_0(6)$ に対応する保型関数となっている．

（有限）集合 X の上の置換は $(123)(4)(56)\cdots$ のように互いに共通部分のない巡回置換の積に表わすことができる．一般に $|X|=n$ とすれば，任意の置換は，

$$1^{t_1}2^{t_2}\cdots n^{t_n}, \quad \sum_{i=1}^{n}it_i=n$$

という形に書ける．ここで，$1,\cdots,n$ などは巡回置換の長さを表わし，t_i はそのベキである．

負ベキの場合も考えて，**一般置換**と呼び，

$$\pi=\prod_t t^{r_t}, \qquad t\in\mathbb{N},\ r_t\in\mathbb{Z}$$

と書く．$r_t\neq 0$ となる自然数 t の集合は有限とする．$\sum_t tr_t$ を一般置換 π の次数と呼ぶ．$\pi=\prod_t t^{r_t}$ に対して，

$$\eta_\pi(z)=\prod_t \eta(tz)^{r_t}$$

と定義しよう．

定理　$\pi=\prod_t t^{r_t}$ を一般置換とするとき，

(a) $\eta_\pi(z)$ は H の上で正則で 0 をとらない．

(b) t_π を π に現れる t の最小公倍数として，$A\in\Gamma_0(t_\pi)$ とするとき，

$$\eta_\pi(Az)=\gamma(cz+d)^{\mathrm{wt}(\pi)}\eta_\pi(z)$$

が成立する．ただし，$\mathrm{wt}(\pi)=\dfrac{1}{2}\sum_t r_t$ で，π の**ウエイト**と呼ぶ．また，γ は 1 のある 24 乗根である．∎

上のように 1 つの一般置換を使って作られたエータ積をある N に対する $\Gamma_0(N)$ で不変になるようにしたい．$SL(2,\mathbb{Z})$ の元 A が与えられれば 1 の 24 乗根の γ も計算できる．しかし，$\Gamma_0(N)$ の元で $\gamma=1$ となることを言うのは簡単ではない．定理を 1 つだけ述べよう．

定理　$\pi=\prod_t t^{r_t}$ を一般置換として次のことを仮定しよう．

(a) $\sum r_t=2k,\ k\in\mathbb{Z}$

(b) $\sum tr_t\equiv 0 \pmod{24}$

f を平方数を含まない正整数で

(c) $\prod t^{|r_t|}=m^2 f,\ m\in\mathbb{N}$, となっているとき，次の条件を満足する自然数 N を選ぶ．

(d) N の約数でない t に対しては $r_t=0$

(e) $\sum \dfrac{N}{t}r_t\equiv 0 \pmod{24}$

(f) $f\equiv(-1)^{k+1} \pmod 4$ のとき $N\equiv 0 \pmod 4$．$f\equiv 2 \pmod 4$ のとき $N\equiv 0 \pmod 8$．

これらの仮定の下に

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ cN & d \end{pmatrix}\in\Gamma_0(N)$$

とすると,

$$\eta_\pi(Az)=\chi(d)(cNz+d)^k\eta_\pi(z)$$

となる．ここで $\epsilon=(-1)^k$ のとき，χ は体 $Q(\sqrt{\epsilon f})$ の N を法として定義された（2 次体の）指標である.

さらに,

（g）$\sum\frac{(t,c)^2}{t}r_t\geqq 0$ を仮定すると，$\eta_\pi(z)$ は $\Gamma_0(N)$ の尖点 $z=\frac{a}{c}$ で正則となり，$\geqq$ を不等号 $>$ に変えると，$\eta_\pi(z)$ は $z=\frac{a}{c}$ で 0 となる. ∎

条件（c）と（d）より $f|N$ が従い，条件（f）は，$\epsilon f\equiv 2,3 \pmod 4$ のとき，$4\epsilon f\,|\,N$ を意味する．ゆえに，D を 2 次体 $Q(\sqrt{\epsilon f})$ の判別式とすると，D は N を割り切るので χ は N を法としても定義されている.

$$\Delta=(-1)^k\prod t^{r_t}$$

とおくと，$Q(\sqrt{\epsilon f})=Q(\sqrt{\Delta})$ で $\chi(d)=\left(\frac{\Delta}{d}\right)$ となる．ここで d は N と素な奇正数で $\left(\frac{\cdot}{\cdot}\right)$ はヤコビ（C. G. J. Jacobi）の記号である．これらの準備をすれば,

$$\eta_\pi(Az)=\left(\frac{\Delta}{d}\right)(cz+d)^k\eta(z)$$

と書いてもよい.

上に述べた定理により，次の系が得られる.

系 $\pi=\prod t^{r_t}$ を一般指標とし，次のことを仮定する.

（a）$\sum r_t=0$

（b）$\sum tr_t\equiv 0 \pmod{24}$

（c）$\prod t^{|r_t|}$ は平方数である

正整数 N を次の条件を満たすようにとる.

（d）t が N を割り切らないときは，$r_t=0$

（e）$\sum\frac{N}{t}\cdot r_t\equiv 0 \pmod{24}$

このとき，$\eta_\pi(z)$ は $\Gamma_0(N)$ で不変である. ∎

次の表はコンウェイ・ノートンの論文から直接得られる．表の読み方は，例えば，第一行は，一般置換 $1^{24}\cdot 2^{-24}$ をとり，対応するエータ積を

表 4.1

N	π
2	$1^{24}/2^{24}$
3	$1^{12}/3^{12}$
4	$1^{8}/4^{8}$
5	$1^{6}/5^{6}$
6	$2^3 3^9/1^3 6^9,\ 2^8 3^4/1^4 6^8,\ 1^5 3/2\cdot 6^5$
7	$1^4/7^4$
8	$1^4 4^2/2^2 8^4$
9	$1^3/9^3$
10	$2\cdot 5^5/1\cdot 10^5,\ 2^4 5^2/1^2\cdot 10^4,\ 1^3 5/2\cdot 10^3$
12	$4^4 6^2/2^2\cdot 12^4,\ 3^3 4/1\cdot 12^3,\ 1^3 4\cdot 6^2/2^2 3\cdot 12^3$
13	$1^2/13^2$
16	$1^2 8/2\cdot 16^2$
18	$6\cdot 9^3/3\cdot 18^3,\ 2^2 9/1\cdot 18^2,\ 1^2 6\cdot 9/2\cdot 3\cdot 18^2$
25	$1/25$

$$\eta_\pi(z)=\frac{\eta(z)^{24}}{\eta(2z)^{24}}$$

とすると，$\eta_\pi(z)$ は，$\Gamma_0(2)$ で不変である，と読む．

この定理（系）は $\eta_\pi(z)$ がある $\Gamma_0(N)$ で不変であることを主張するのに便利だが，リーマン面 $\Gamma_0(N)\backslash H^*$ の種数が 0 となる N はあまりない．コンウェイ・ノートンの仕事には $\Gamma_0(N)$ とそのいくつかのアトキン・レーナーインボルーションで生成された不連続群に対応する保型関数も必要になる．

$e\|N$ として

$$\omega_e=\begin{pmatrix} ae & b \\ cN & de \end{pmatrix}$$

を $\Gamma_0(N)$ のアトキン・レーナーインボルーションとし，t を N を割る正整数とするとき，

$$\eta(t\omega_e z)=\gamma\left(\frac{cNz+de}{(e,t)}\right)^{\frac{1}{2}}\eta\left(\frac{et}{(e,t)^2}z\right)$$

が成立する．ここで γ は 1 の 24 乗根である．π を一般置換とし，e を 1 つの自然数とする．新しい一般置換 $\pi * e$ を次の式で定義する．

$$\pi * e = \prod_t \left(\frac{et}{(e,t)^2} \right)^{r_t}$$

アトキン・レーナーインボルーションの入った変換法則は簡単ではない．定理を 1 つ述べる．もっと簡明な定理ができるのが望ましい．

定理 一般置換 π が次の条件を満足するとしよう．

(a) $\sum_t r_t = 0$

(b) $\sum_t t r_t \equiv 0 \pmod{24}$

(c) $\prod_t t^{|r_t|}$ は平方数

さらに，$e \| N$ となる自然数 e, N が次の条件を満たすとする．

(d) $\pi * e = \pi$

(e) $\prod_t (e,t)^{r_t} = 1$

(f) $\sum_t \frac{e}{(e,t)} \cdot r_t \equiv 0 \pmod{8}$

(g) $r_t = 0$ ($t \nmid N$ のとき)

(h) $\sum_t \frac{N}{t} \cdot r_t \equiv 0 \pmod{24}$

(i) $\sum_t \frac{N(e,t)}{et} \cdot r_t \equiv 0 \pmod{8}$

(j) $$\prod_t \left(\frac{\frac{N(e,t)}{et}}{\frac{e}{(e,t)}} \right)^{r_t} = 1$$

(k) $$\prod_t \left(\frac{\frac{e}{(e,t)}}{\frac{N(e,t)}{et}} \right)^{r_t} = 1$$

ここで (j) と (k) の $\left(\frac{\cdot}{\cdot}\right)$ はヤコビの記号である．このとき，$\eta_\pi(z)$ は 群 $\langle \Gamma_0(N), \omega_e \rangle$ で不変である． ∎

次の表もコンウェイ・ノートンの論文から直接得られる．意味は明らかであろうが，例えば，

$$\frac{\eta(z)^2\eta(2z)^2}{\eta(5z)^2\eta(10z)^2}$$

表 4. 2

Γ	π
$10+2$	$1^2 2^2/5^2 10^2$
$10+5$	$1^4 5^4/2^4 10^4$
$10+10$	$2^6 5^6/1^6 10^6$
$20+4$	$1^2 4^2 10^2/2^2 5^2 20^2$
$20+20$	$4^2 5^2/1^2 20^2$
$20+$	$2^8 10^8/1^4 4^4 5^4 20^4$
$30+15$	$3\cdot 5/2\cdot 30,\ 1\cdot 6^2 10^2\cdot 15/2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 30^2,\ 1^2 6\cdot 10\cdot 15^2/2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 30^2$
$30+6,10$	$1^3 6^3 10^3 15^3/2^3 3^3 5^3 30^3$
$30+3,5$	$1\cdot 3\cdot 5\cdot 15/2\cdot 6\cdot 10\cdot 30$
$30+2,15$	$3\cdot 5\cdot 6\cdot 10/1\cdot 2\cdot 15\cdot 30$
$30+5,6$	$2^2 3^2 10^2 15^2/1^2 5^2 6^2 30^2$
$50+50$	$2\cdot 25/1\cdot 50$
$60+12,15$	$1\cdot 12\cdot 15\cdot 20/3\cdot 4\cdot 5\cdot 60$
$60+4,15$	$2\cdot 3\cdot 5\cdot 12\cdot 20\cdot 30/1\cdot 4\cdot 6\cdot 10\cdot 15\cdot 60$
$60+$	$2^2 6^2 10^2 30^2/1\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 12\cdot 15\cdot 20\cdot 60$
$70+10,14$	$1\cdot 10\cdot 14\cdot 35/2\cdot 5\cdot 7\cdot 70$

は 群 $\langle \Gamma_0(10),\, \omega_2 \rangle$ で不変と読む.

表 4. 1 と表 4. 2 に現われている不連続群 Γ はすべて種数が 0 である (見てすぐわかることではないが). ゆえに, その関数体 $k(\Gamma\backslash H^*)$ は複素数体 $\mathbb{C}$ 上ただ 1 つの関数 $f(z)$ で生成される. 表 4. 1, 表 4. 2 であげたエータ積が, 対応する不連続群 Γ から作られるリーマン面 R の関数体 $k(R)$ の生成元であることを示したい.

定理 π を一般置換として, 次のことを仮定しよう.

(a) $\sum tr_t = -24$

(b) $\eta_\pi(z)$ は $SL_2(\mathbb{R})$ の $\Gamma_0(N)$ を含む不連続群部分群 Γ で不変とする. N はある正整数である.

(c) Γ の $z=\infty$ を固定する部分群 $\Gamma_\infty = \{\alpha\in\Gamma \mid \alpha(\infty)=\infty\}$ は $\left\{\pm\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix} \,\middle|\, n\in\mathbb{Z}\right\}$ に等しい.

(d) $z=\infty$ は $\eta_\pi(z)$ の唯一の極である（Γ 同値のものは同一視して）.

このとき，$\eta_\pi(z)\in\mathfrak{F}$ で リーマン面 $\Gamma\backslash H^*$ の関数体は，$\mathbb{C}(\eta_\pi(z))$ に等しい. ∎

定理 π を次数（$\sum_t tr_t$）が -24 の一般置換で，$\eta_\pi(z)$ は $\Gamma=\Gamma_0(N)$，または，$\Gamma=\langle\Gamma_0(N), \omega_{e_1},\omega_{e_2},\cdots,\omega_{e_r}\rangle$ で不変と仮定する．N_1 を

$$1\leqq c\,|\,N,\ c\neq N\ ;\ \omega_e\in\langle\omega_{e_1},\cdots,\omega_{e_r}\rangle \text{ のときは, } c\neq\frac{N}{e}$$

を満たす整数 c の集合とする．さらに，

$$\sum\frac{(t,c)^2}{t}r_t\geqq 0$$

がすべての $c\in N_1$ に対して成立しているとする.

これらの条件の下で $\eta_\pi(z)$ は，関数体 $k(\Gamma\backslash H^*)$ の生成元となる．特に，リーマン面 $\Gamma\backslash H^*$ の種数は 0 である. ∎

前の定理は条件（a）～（d）が満たされていれば $\eta_\pi(z)$ は不連続群 Γ に属するリーマン面の関数体の生成元であることを言い，後の定理は一般置換 π に属する $\eta_\pi(z)$ が条件（a）～（d）を満たすための条件を述べている.

コンウェイとノートンは，この節で述べてきた $\eta_\pi(z)$ のようなエータ積を主な構成要素として，マッカイ・トンプソン予想を有限範囲で満たすような，171 対の不連続群 Γ_g と保型関数 $J_g(z)$ を得た．ただし，Γ_g は明確には与えられておらず，具体的に記述可能な不連続群 E_g の，ある小さい指数 h の部分群が Γ_g となるという形で論文には発表されている．$h=1$ となる場合も多い．いずれにしても，かなり複雑なものであるからここではその全体の記述はしない．すべてのモンスターの元に対して $J_g(z),\Gamma_g$ を簡明に書く研究は当然なされてよいと思われる．それと，$\Gamma_0(25)$ などの不連続群がモンスターからは得られない理由を探す研究が今後の課題であろう.

4.3 再生性を持つ保型関数

コンウェイとノートンは 171 対の不連続群 Γ_g と保型関数 $J_g(z)$ を得た．彼らは，それら 171 個の $J_g(z)$ の係数の間に**再生性**（replicability）と言われる

性質があることを発見した.

すでに定義したように,

$$J(z)=j(z)-744=\frac{1}{q}+\sum_{n=1}^{\infty}c_nq^n$$

とする. 本書の他の章, 他の節に従えば c_n は $c(n)$ と書くべきであるが, この節に限って再生性を持つ関数で通常使われている係数表示をすることにする. p を素数として $P(z)$ を

$$\begin{aligned}P(z)&=J(pz)+J\left(\frac{z}{p}\right)+J\left(\frac{z+1}{p}\right)+\cdots+J\left(\frac{z+p-1}{p}\right)\\&=\sum_{\substack{ad=p\\0\leqq b<d}}J\left(\frac{az+b}{d}\right)\end{aligned}$$

と定義しよう. $SL(2,\mathbb{Z})$ の生成元は,

$$S=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\quad T=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

にとれるが, $J(z)$ が S と T で不変なことを使えば, $P(z)$ も $p+1$ 項の和として S と T で不変なことが容易に証明される. 実際, S も T も, $P(z)$ の定義式の $p+1$ 項の上の置換として作用している. 第 1 項 $J(pz)$ の固定群が $\Gamma_0(p)$ となっていることも容易にわかる.

局所変数 $q=e^{2\pi iz}$ を使って, $z=i\infty$ の近傍で $P(z)$ を級数展開すると,

$$P(z)=(1/q^p+c_1q^p+c_2q^{2p}+\cdots)+p(c_pq+c_{2p}q^2+\cdots)$$

となっている. リーマン面 $SL(2,\mathbb{Z})\backslash H^*$ の関数体は $J(z)$ で生成され, また $P(z)$ は H の上に極を持っていないので $P(z)$ は $J(z)$ の多項式 $P_p(J)$ となる. $P(z)$ の q 展開式より, $P(z)\equiv J(pz)\equiv J^p(z) \pmod p$ であるから

$$P_p(J)=J^p-pf_p(J),\quad f_p(X)\in\mathbb{Z}[X]$$

と書け,

$$P(z)=P_p(J)=J(pz)+p(c_pq+c_{2p}q^2+\cdots)$$

と比べて,

$$\frac{1}{p}\{J(z)^p - J(pz)\} = f_p(J) + c_p q + c_{2p} q^2 + \cdots$$

が得られる．これを $p=2,3$ の場合に計算してみると，

$$P_2(J) = J^2 - 2c_1, \qquad P_3(J) = J^3 - 3c_1 J - 3c_2.$$

すなわち，$f_2 = c_1$，$f_3 = c_1 J + c_2$ となるから，

$$\frac{1}{2}(J(z)^2 - J(2z)) = c_1 + \{c_2 q + c_4 q^2 + \cdots\}$$
$$\frac{1}{3}(J(z)^3 - J(3z)) = c_1 J(z) + c_2 + \{c_3 q + c_6 q^2 + \cdots\}$$

などの式が得られる．

$J(z)$ はモンスターの単位元 1 に対応するマッカイ・トンプソン級数であった．上式の $J(z)$ のところにモンスターの任意の元 g に対応するマッカイ・トンプソン級数 $J_g(z)$ を代入したらどうなるだろうか．試みに，

$$\frac{1}{2}(J_g(z)^2 - J_{g^2}(2z))$$

を作って計算してみると，$p=2$ のときの $J(z), J(2z)$ の関係式で，c_i を $\mathrm{Tr}(g\,|\,V_{i+1})$ という指標に置き換えればよいという予想がつく．$c_i = \mathrm{Tr}(1\,|_{V_{i+1}})$ であった．それは実際正しくて，$\chi_i(g) = \mathrm{Tr}(g\,|_{V_i})$ とおけば

$$\frac{1}{2}(J_g(z)^2 - J_{g^2}(2z)) = \chi_2(g) + \{\chi_3(g)q + \chi_5(g)q^2 + \cdots\}$$
$$\frac{1}{3}(J_g(z)^3 - J_{g^3}(3z)) = \chi_2(g)J_g(z) + \chi_3(g) + \{\chi_4(g)q + \chi_7(g)q^2 + \cdots\}$$

等の等式が成立していて，二重公式，三重公式などと呼ばれている．二重公式の q^2 の係数を比較して，

$$\chi_5(g) = \chi_4(g) + \frac{1}{2}\{\chi_2(g)^2 - \chi_2(g^2)\}$$

が言える．さらに，

$$\chi_7(g) = \chi_5(g) + \chi_3(g)\chi_2(g)$$
$$\chi_9(g) = \chi_6(g) + \chi_4(g)\chi_2(g) + \frac{1}{2}\{\chi_3(g)^2 - \chi_3(g^2)\}$$

などの等式も得られる．種々の等式を組み合わせると，任意の n に対する $\chi_n(g)$ は $\{\chi_2(g^i),\ \chi_3(g^i),\ \chi_4(g^i),\ \chi_6(g^i),\ 1 \leqq i \leqq |g|\}$ の値によって決まっているとの予想ができる．コンウェイ・ノートンが提出した171個の保型関数についてはその予想が正しいことが証明されている．ただし，その171個の保型関数が実際にモンスターの作用する加群からきているかどうかが大問題であった．フレンケル・レパウスキー・マーモン（I. Frenkel - J. Lepowsky - A. Meurman）によって1980年代に構成されたムーンシャイン加群の場合には，もちろんモンスターが作用しているのであるが，それから定義されるマッカイ・トンプソン級数と，コンウェイ・ノートンが提出した171個の保型関数が一致していることをボーチャズ（R. E. Borcherds）は証明するのである．その決め手となったのが**再生公式**である．それによって，コンウェイ・ノートンの提出した171個の保型関数 $J_g(z)$ が，

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Tr}(g \,|\, V_n) q^{n-1}$$

に等しいことが初めて判明するのである．これについては後章で詳述する．

モンスターから生ずる171個の保型関数の再生性はモンスターの元 g のベキ g^i を通して記述されているが，再生性そのものには群やその元を使わなくても定義できる．すなわち，群と無関係に再生性を持つ（形式的）関数の集合というものを考えることができるのである．

n, a, b, d を正整数とし，$J(z) = j(z) - 744$ は今までと同じとして，

$$\widehat{P}_n(z) = \sum_{\substack{ad=n \\ 0 \leqq b < d}} J\left(\frac{az+b}{d}\right)$$

とおく．$\widehat{P}_n(z+1) = \widehat{P}_n(z)$, $\widehat{P}_n(-\frac{1}{z}) = \widehat{P}_n(z)$ となっていることは容易に証明できるので，$\widehat{P_n}(z)$ は $SL_2(\mathbb{Z})$ 不変であり，極を調べて $\widehat{P}_n(z)$ は $J(z)$ の多項式となることがわかる．このあたりの事情は $n=p$ のときと同じである．

$\widehat{P_n}(z)$ の極部は $\dfrac{1}{q^n}$ であるので，$\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{Z}$ を適当に選べば，

$$\widehat{P_n}(z) - J(z)^n - \alpha_1 J(z)^{n-1} - \alpha_2 J(z)^{n-2} - \cdots - \alpha_n$$

は $q\mathbb{Z}[q]$ に入る．いたるところ正則な関数ができたのでそれは0に等しい．ゆえに，

$$P_n(X)=X^n+\alpha_1 X^{n-1}+\alpha_2 X^{n-2}+\cdots+\alpha_n$$

とおけば,

$$\widehat{P_n}(z)=P_n(J)$$

である．それゆえ，P_n は $P_n(J)$ の q 展開が $\bmod q\mathbb{Z}[[q]]$ で q^{-n} に等しくなるような唯一の多項式である．このように $J(z)$ を使って，各 $n\in N$ に対して，多項式 $P_n(X)$ が決まる．形式的な q の級数

$$f=\frac{1}{q}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$$

を考えよう．各 n について a_n は（必要があれば複素数値をとる）不定元としておく．f は形式的なものであるが，$q=e^{2\pi iz}$ と書き，f を関数と呼ぶことにする．

関数 f に対して，関数 $\{f^{(a)}\}$ が存在して

$$P_n(f(z))=\sum_{\substack{ad=n\\0\leqq b<d}} f^{(a)}\left(\frac{az+b}{d}\right)$$

となっているとき，f は**再生性を持つ**と言う．$f^{(a)}$ は**再生子**と呼ばれる．関数の集合 $\mathfrak{F}=\{f_j\}_{j\in I}$ は f_j のすべてが再生性を持ち，さらにその再生子 $f_j^{(a)}$ も $\mathfrak{F}$ に入っているとき，$\mathfrak{F}$ は完全再生性を持つと言う．1 つの関数 $J(z)$ からなる集合

$$\mathfrak{F}=\{J(z)\}$$

は完全再生性を持つ．$\mathfrak{F}$ をコンウェイ・ノートンが構成した 171 個のマッカイ・トンプソン級数とすると $\mathfrak{F}$ は**完全再生性**を持つ．

（完全）再生性を持つ関数の集合を決めるという問題は，コンウェイ・ノートンが 171 個の保型関数について再生性を発見してから盛んに研究が行われている．関数 $f=\dfrac{1}{q}+\sum\limits_{n=1} a_n q^n$ の係数 a_n をどの体（環）に制限するかで問題は違ったものになる．

ノートンは，整数係数で再生性を持つ関数は，自明なもの $(a_n=0,\ n>1)$ か，または種数 0 のある不連続群 Γ に属する正規化された保型関数（Haupt

Modul）になると予想した．この不連続群 Γ 自体にも制限がついて，Γ はある N に対しての $\Gamma_0(N)$ を含み，

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma$$

となるのは $a \in \mathbb{Z}$ のときに限ると予想は言う．

多項式 $P_n(X)$ の母関数は

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n(X)}{n} q^n = -\log(q(f(z)-X))$$

である．この母関数により（また，直接計算によっても）

$$P_1(X)=X, \quad P_2(X)=X^2-2a_1, \quad P_3(X)=X^3-3a_1X-3a_2, \cdots$$

などがわかる．

さらに一般に，$\{P_n(X)\}_{n\in N}$ は公式

$$ra_{r-1}+\sum_{k=-1}^{r-2} a_k P_{r-k-1}(X) = XP_{r-1}(X), \quad r=1,2,\cdots$$

を満たす．これは

$$P_r(X) = XP_{r-1}(X) - \sum_{k=0}^{r-2} a_k P_{r-k-1}(X) - ra_{r-1} \tag{P}$$

とも書ける．

$$P_n(f(z)) = q^{-n} + n\sum_{m=1}^{\infty} H_{m,n} q^m \tag{H}$$

によって，$\{H_{m,n}\}$ を定義しよう．明らかだが，

$$f(z) = q^{-1} + \sum H_{m,1} q^m$$

となっている．すなわち，$a_m = H_{m,1}$ である．$H_{m,n}$ は公式

$$H_{r,s} = a_{r+s-1} + \frac{1}{r+s}\sum_{m=1}^{r-1}\sum_{n=1}^{s-1}(m+n)a_{r+s-m-n-1}H_{m,n}$$

を満たしている．また，$\{H_{m,n}\}$ を使って再生性を定義することもできる．

定理　$H_{m,n} = H_{r,s}$ が $mn = rs$, $gcd(m,n) = gcd(r,s)$ のとき常に成立しているならば，f は再生性を持つ．　∎

これを証明してみよう．f を関数 $\sum_{n=-1}^{\infty} a_n q^n$ とし，式(H)によって，$H_{m,n}$ を定義し，集合 $\{H_{m,n}\}$ が定理の条件を満足するとしよう．f の再生子となるべき $f^{(k)}$ を

$$f^{(k)}(z)=\sum_{i=-1}^{\infty} a_i^{(k)} q^i$$

によって定義する．ただし，

$$a_i^{(k)}=k\sum_{d|k}\mu(d)H_{\frac{k}{d},dki}, \quad i>0, \qquad a_{-1}^{(k)}=1, \quad a_0^{(k)}=0$$

であり，μ はメービウス関数である．$f=f^{(1)}$ は自明に成立している．メービウスの反転公式を思い出そう．

$$f(n)=\sum_{d|n} g(d) \Longrightarrow g(n)=\sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)f(d)$$

この反転公式を使うと，

$$H_{r,rs}=\sum_{d|r}\frac{1}{d}a_{r^2s/d^2}^{(d)}$$

が言え，定理の条件を使うと，

$$H_{m,n}=\sum_{d\,|\,(m,n)}\frac{1}{d}a_{mn/d^2}^{(d)}$$

が言える．式(H)に再び帰れば，

$$P_n(f(z))=\frac{1}{n}\sum_{\substack{ad=n\\ a\leqq b<d}} f^{(a)}\left(\frac{az+b}{d}\right)$$

が言えていることがわかる．これは，f が再生性を持つことを示している．

逆も示せるので，再生性の定義は $\{H_{m,n}\}$ で述べてもよい．再生子 $f^{(a)}$ は一般には n の約数の数だけ異なったものがある．n を素数 p として，再生子を具体的に求めてみよう．まず定義から

$$P_p(f)=f^{(p)}(pz)+\sum_{k=0}^{p-1} f\left(\frac{z+k}{p}\right)$$

である．

$$U_p : a_n q^n \to a_{pn} q^n$$
$$(V_p : a_n q^n \to a_n q^{pn})$$

をヘッケ（E. Hecke）の作用素の理論でよく知られた作用素とすると

$$f^p(pz) = P_p(f) - pf|_{U_p}$$

を得る．多項式 $P_p(X)$ は式（P）によって判明するので，$f^p(pz)$ が計算可能な形になっていることがわかる．

完全再生性を持つ関数の集合は係数 a_n がすべて整数という条件の下には求められている．その他の条件でも研究はなされていて興味深い問題であろう．無限個の変数を含む問題であるが，f が再生性を持つ関数（整数係数）であるならば，$H_{m,n}$ は $i \in B = \{1,2,3,4,5,7,8,9,11,17,19,23\}$ に対する $a_i = H_{m,1}$ の多項式として書けることもわかっているので，有限の問題となっているのである．

第 5 章

頂点作用素代数

1973 年に発見され，散在的単純群のなかで最大位数を持つモンスターが，古典的な保型関数論に関係してきたことは，それ自体有限群論にとって素晴しいことであった．しかしそれだけでは終わらなかった．マッカイ・トンプソン予想とコンウェイ・ノートン予想を解くためには，現代物理学の弦理論にその源を持つ，頂点作用素代数というものが必要だったのである．この章では頂点作用素代数の基礎と，その理論を主として用いて，コンウェイ・ノートン予想の解決に成功したボーチャズの理論を述べる．

5. 1　ムーンシャイン加群の構成

4. 1 で述べたマッカイ・トンプソン予想，4. 2 で述べたコンウェイ・ノートン予想はモンスター加群 V_n の無限個の直和

$$V=\coprod_{n=0}^{\infty} V_n$$

で，モンスター $\mathbb{M}$ の任意の元 g に対して

$$J_g(z)=\sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{Tr}\,(g|_{V_n})q^{n-1}, \quad q=e^{2\pi iz}, \quad z\in H=\{z\in\mathbb{C}\,|\,\mathrm{Im}(z)>0\}$$

とおいたとき，$J_g(z)$ が種数 0 のリーマン面に対応している保型関数になっているV の存在を仮定している．そのようなベクトル空間 V を構成しよう．後で V が正しいものであることがわかるのであるが，この節では空間 V を構

成するだけである．モンスター $\mathbb{M}$ が作用していることは本書では述べない．また関数 $J_g(z)$ を計算すること等については，節を変えて述べる．

$$J(z)=j(z)-744=\sum_{n=0}^{\infty} c_n q^{n-1}$$

のとき $c_n=\dim V_n$ となるべきであった．前章までは

$$J(z)=j(z)-744=\frac{1}{q}+\sum_{n=1}^{\infty} c(n)q^n$$

という係数が $c(n)$ である表示を使ってきたが，頂点作用素代数の見地からは，c_n を使う方が便利と思われるので今後はそれを使う．V_0 が物理でいう真空に対応していて，しかも $J(z)$ の最初の項 $\dfrac{1}{q}$ にも対応しているのである．いうまでもなく $c(n-1)=c_n$ である．各 n に対して V_n がモンスター加群ということはひとまず考えないで，上の $J(z)$ の式がどのようにして作られるかを見よう．

$$J(z)=\frac{\Theta(E_8^3,z)}{\Delta(z)}-744$$

と書けることは 4.1 でも述べた．正定値でユニモデュラーな 24 次元の偶格子はニーマイヤー格子と呼ばれているが，それらは全部で 24 個ある．$E_8^3=E_8\oplus E_8\oplus E_8$ はその 1 つなのである．

一般に，N をニーマイヤー格子とし，

$$N_2=\{\lambda\in N \mid \langle\lambda,\lambda\rangle=2\}$$

とすると，

$$J(z)=\frac{\Theta(N,z)}{\Delta(z)}-|N_2|-24$$

となる．$N=E_8^3$ の場合には $|N_2|=3\cdot 240=720$ である．また N としてリーチ格子 Λ を選ぶと，$|\Lambda_2|=0$ だから，

$$J(z)=\frac{\Theta(\Lambda,z)}{\Delta(z)}-24$$

となる．一方，

$$\Delta(z)=q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}$$

であった．ゆえに

$$J(z)=\frac{1}{q}\Theta(\Lambda,z)\left(\frac{1}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)\cdots}\right)^{24}-24$$

となる．ここで

$$\Theta(\Lambda,z)=\sum_{\alpha\in\Lambda}e^{\pi i\langle\alpha,\alpha\rangle z}=\sum_{n=0}^{\infty}|\Lambda_{2n}|q^n,\quad q=e^{2\pi iz},\quad z\in H$$

である．すなわち，$\Theta(\Lambda,z)$ はリーチ格子 Λ のテータ関数である．Λ を可換群と考えて K 上の群環 $K[\Lambda]$ を作る．K は標数 0 の体である．やはりここでも $K=\mathbb{R},\mathbb{C}$ と仮定して失うものはほとんどない．$\mathrm{wt}(\alpha)=\dfrac{\langle\alpha,\alpha\rangle}{2}$ として $K[\Lambda]$ のウェイト部分空間への分解を

$$X=K[\Lambda]=\coprod_{n=0}^{\infty}X_n$$

とおけば，$\dim X_n=|\Lambda_{2n}|$ である．

一方，

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-q^n}\right)^{24}=\sum_{n=0}^{\infty}b_nq^n$$

と展開するとき，

$$Y=\coprod_{n=0}^{\infty}Y_n$$

で，$\dim Y_n=b_n$ となっている Y を作ることも次に示すように容易である．

U を基底 $\{u_i\}_{i=1}^{24}$ で張られた 24 次元ベクトル空間（例えば，$U=K\otimes\Lambda$）とし，

$$\widehat{U}^-=\coprod_{n=-1}^{-\infty}U\otimes t^n$$

と定義しよう．$\widehat{U}^-$ の元に対して，$\mathrm{wt}(u_i\otimes t^n)=-n$ と定めれば $\widehat{U}^-$ は次数付きの空間となる．$u_i\otimes t^n=u_i(n)$ と書こう．

$$\mathfrak{U}=S(\widehat{U}^-)$$

を $\widehat{U}^-$ 上の対称積代数とする（2.3 参照）．$\mathfrak{U}$ は $\{u_i(n)\}_{1\leqq i\leqq 24,\, n<0}$ を不定元とする多項式環をみなせる．$\mathfrak{U}$ にも $\widehat{U}^-$ から誘導された重さが自然に入っている．例えば，$\mathrm{wt}\,(u_i(-2)u_j(-3)^2)=2+6=8$.

$$S(\widehat{U}^-)=\coprod_{n=0}^{\infty}\mathfrak{U}^n, \quad \mathfrak{U}^n=\{u\in\mathfrak{U}\,|\,\mathrm{wt}\,(u)=n\}, \quad \mathfrak{U}^0=K$$

と分解すれば，$\dim\mathfrak{U}^n=b_n$ となっている．

そこで，$U=K\otimes\Lambda$ として $S(\widehat{U}^-)$ を $S(\widehat{\Lambda}^-)$ と書く．

$$V=S(\widehat{\Lambda}^-)\otimes K[\Lambda]=\coprod_{n\geqq 0}V_n$$

を作り，V にテンソル空間のウェイトを入れれば

$$\dim V_n=c_n, \quad n\neq 1$$

である．$c_1=0$ であったが，いま上で作った V では $\dim V_1=24$ となっている．加群 V の問題点を探ってみよう．

まず，定数項が 24 であることは望ましくない．4.3 でも見たように定数項は 0 の方がよい．しかし，24 であってもまた他の数であっても，それが致命的とは言えない．定数項には 24 次の自明な表現が対応していると思えば，一応急場はしのげる．後で述べるフレンケル・レパウスキー・マーモンによって構成されたムーンシャイン加群 $V^\natural=\coprod_{n\geqq 0}V_n$ では定数項に対応する項 V_1 が望み通り消えている．しかし，そのように構成したら，モンスターが作用していることが証明できたのだから，それで一件落着しているものの，定数項が消えることの必然性があってもよい．フレンケル・レパウスキー・マーモンが構成したように，頂点作用素代数というものからムーンシャイン加群 $V^\natural=\coprod_{n\geqq 0}V_n$ が構成される．頂点作用素代数の一般論とモンスターの 196883 次の既約表現の性質から，

$$\dim V_0=1, \quad \dim V_2=196884$$

となっていて，モンスターが忠実に作用している V_2 を持つ頂点作用素代数 V を構成しようとすれば，必然的に $V_1=0$ となってしまうと思われる．モン

スターの 196883 次の表現空間の上の代数構造は可換なものしかないからである．

消えていない定数項のことはこのくらいにして，

$$V=S(\widehat{\Lambda}^{-})\otimes K[\Lambda]$$

に，他の問題点はないだろうか．第 3 章で述べたようにモンスター $\mathbb{M}$ は位数 2 の元 z を持っていて，その $\mathbb{M}$ における中心化群 $C=C_{\mathbb{M}}(z)$ は位数 2^{25} のエクストラスペシャル群 Q を正規部分群として含んでいて，

$$C/Q\cong Conway_1$$

となっている．C はモンスター $\mathbb{M}$ の極大部分群であるから，

$$\mathbb{M}=\langle C,\sigma\rangle,\quad \sigma\notin C$$

と書ける．

σ の選び方，そして σ の V への作用のことはひとまず考えないことにしても，初めに与えられた C が V の上に忠実に作用していないといけない．リーチ格子の自己同型群をその位数 2 の中心で割った群が単純群 $Conway_1$ なのだから，

$$V=S(\widehat{\Lambda}^{-})\otimes K[\Lambda]$$

への C/Q の作用は期待できる．しかし，Q を忠実に作用させることはできない．Q は忠実な既約表現 φ をただ 1 つだけ持っており，その次数は 2^{12} である．その表現が何らかの形で表わされるような V でないとモンスターの作用する加群としては望み薄になる．この φ をうまく融合させてマッカイ・トンプソン級数を作る考えは，すでにコンウェイ・ノートンの論文の中に現われている．それは，定数項を除くと

$$J_g(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_{\pi}{}^{-}(z)+\delta_{\pi}\cdot\theta_{\pi}(2z)}{\eta_{\pi}(z)}+\frac{\theta_{-\pi}{}^{-}(z)+\delta_{-\pi}\cdot\theta_{-\pi}(2z)}{\eta_{-\pi}(z)}\right)$$

という予想で表わされる．この公式を説明しよう．g は C の元である．C は位数 2 の群による不分岐中心拡大 C_2 を持つ．C_2 は記号的に

$$2^{1+24}\mathrm{Aut}(\Lambda)$$

と書かれる群であり，3. 2 で述べた C_2 と同じ群である．C_2 の剰余群 $\mathrm{Aut}(\Lambda)$ における g の像を $\pm\pi$ とおけば，それらはリーチ格子 Λ の上の一般置換として表わすことができ，$\eta_{\pm\pi}$ はその一般置換を使って定義できる（4. 2 参照）．$\mathrm{Aut}(\Lambda)$ の元 σ に対して，Λ_σ を Λ の元で σ で固定されるもの全体の部分空間とする．$\theta_\sigma(z)$ は部分格子 Λ_σ のテータ関数である．$\theta_\sigma^-(z)$ はねじれのあるテータ関数で次のように定義される．

$$\theta_\sigma^-(z)=\sum_{v\in\Lambda_\sigma}\pm q^{\langle v,v\rangle}$$

ここで ± 記号は，v が対称的のときプラス符号，v が非対称的のときマイナス符号と決める．$v\in\Lambda$ は $Q/Z(Q)\cong\Lambda/2\Lambda$ に 1 つの像を持っているが，その像は Q では 2 点集合となる．その 2 点集合の中の各々の元が σ によって固定されるか，されないかに従って，$v\in\Lambda$ を対称的，非対称的と定義する．最後に δ_σ は C_2 の 2^{12} 次の既約指標の σ における値である．

フレンケル・レパウスキー・マーモンによって構成されたムーンシャイン加群を以下，天下り的に記そう．

$$V^\natural=(S(\widehat{\Lambda}^-)\otimes K\{\Lambda\})^\theta\oplus(S(\widehat{\Lambda}^-_{\frac{1}{2}})\otimes T)^\theta.$$

θ は（　）内にある数学的対象の位数 2 の線型写像であり，（　$)^\theta$ は θ によって固定される元全体からなる集合を示す．S は対称積代数をとる作用素であり，Λ はリーチ格子，T は Q の忠実な 2^{12} 次の表現を C_1 にまで持ち上げたものである．$K[\Lambda]$ はリーチ格子を可換群とみたときの群環であった．$K\{\Lambda\}$ はベクトル空間としては $K[\Lambda]$ と同型だが，その基底は $\{e^\alpha\,|\,\alpha\in\Lambda\}$ であり $e^\alpha e^\beta=(-1)^{\langle\alpha,\beta\rangle}e^\beta e^\alpha$ となって「ねじれ」が入っている．$\widehat{\Lambda}^-$，$\widehat{\Lambda}^-_{\frac{1}{2}}$ はフレンケル・レパウスキー・マーモンは，$\widehat{\mathfrak{h}}^-_{\mathbb{Z}}$，$\widehat{\mathfrak{h}}^-_{\mathbb{Z}+1/2}$ という記号を使っている．$\mathfrak{h}$ はハイゼンベルク（W. Heisenberg）代数を示唆し，またリー代数のカルタン（E. Cartan）部分代数をも示唆している．しかし，我々の場合は，それらはリーチ格子から直接作られるので，$\widehat{\Lambda}^-$，$\widehat{\Lambda}^-_{\frac{1}{2}}$ という記号を使うことにする．

$\widehat{\Lambda}^-$，$\widehat{\Lambda}^-_{\frac{1}{2}}$ のマイナス符号は物理学者の量子力学発生当初からの慣例に従ったのであり，数学者にとってはプラス符号の方が良いかもしれない．

さて，以上が概略であるが，以下，各々の空間をもう少し丁寧に定義する．

Λ は今まで通りリーチ格子（$K\otimes\Lambda$ のような係数拡大も，紛れがない限り同じ記号 Λ で表わすこともある）で，正定値，ユニモデュラーな 24 次元の偶形式を持つ．

$$\widehat{\Lambda}=\coprod_{n=-\infty}^{\infty}(K\otimes\Lambda\otimes t^n)\oplus Kc$$

と定義する．t は不定元である．$\widehat{\Lambda}$ には次のようにしてリー代数の構造が入る．

（1）$[c,\widehat{\Lambda}]=0$.

（2）$[g\otimes t^m,h\otimes t^n]=\langle g,h\rangle m\delta_{m+n,0}\,c$ がすべての $g,h\in\Lambda$，$m,n\in\mathbb{Z}$ について満たされている．

一般に $\mathfrak{g}$ をリー代数とし，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ を $\mathfrak{g}$ の上の不変な対称双 1 次形式としよう．

$$\widehat{\mathfrak{g}}=\coprod_{n\in\mathbb{Z}}(\mathfrak{g}\otimes t^n)\oplus Kc$$

のとき，

$$[c,\widehat{\mathfrak{g}}]=[\widehat{\mathfrak{g}},c]=0$$
$$[x\otimes t^m,y\otimes t^n]=[x,y]\otimes t^{m+n}+\langle x,y\rangle m\delta_{m+n,0}\,c$$

と $\widehat{\mathfrak{g}}$ の上に交換子を入れれば $\widehat{\mathfrak{g}}$ はリー代数となる．$\widehat{\mathfrak{g}}$ はアフィンリー代数と呼ばれているものの 1 つで，$\mathfrak{g}$ のアフィン化とも呼ばれる．$\widehat{\Lambda}$ はリーチ格子を係数拡大して可換リー代数とみたときのアフィン化である．

フレンケル・レパウスキー・マーモンのムーンシャイン加群 $V^\natural$ にはねじれのあるアフィン化 $\widehat{\Lambda}_{\frac{1}{2}}$ も必要なのでそれを一般のリー代数 $\mathfrak{g}$ を使って定義しよう．$\langle\cdot,\cdot\rangle$ を $\mathfrak{g}$ の不変対称双 1 次形式とする．さらに $\mathfrak{g}$ は位数 2 で $\langle\cdot,\cdot\rangle$ を不変にする自己同型 θ を持つと仮定しよう．

$$\mathfrak{g}_{\pm}=\{x\in\mathfrak{g}\,|\,x^{\theta}=\pm x\}$$

で $\mathfrak{g}$ の部分空間 $\mathfrak{g}_+$ と $\mathfrak{g}_-$ を定義する．$\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g}_+$ と $\mathfrak{g}_-$ の直和であり，$\mathfrak{g}_+$ は $\mathfrak{g}$ の部分リー代数ともなっている．

$$\langle \mathfrak{g}_+, \mathfrak{g}_- \rangle = 0$$

となっていることも容易にわかる．

$$\widehat{\widehat{\mathfrak{g}}} = \coprod_{n \in \mathbb{Z}} \left(\mathfrak{g} \otimes t^{\frac{n}{2}} \right) \oplus Kc$$

とおき，$\widehat{\mathfrak{g}}$ のときと同じように（すべての整数および半整数 m, n に対して）

$$[c, \widehat{\widehat{\mathfrak{g}}}] = [\widehat{\widehat{\mathfrak{g}}}, c] = 0$$
$$[x \otimes t^m, y \otimes t^n] = [x, y] \otimes t^{m+n} + \langle x, y \rangle m \delta_{m+n,0}\, c$$

と定義すれば，$\widehat{\widehat{\mathfrak{g}}}$ はリー代数となる．$\mathfrak{g}$ の自己同型 θ は $\widehat{\widehat{\mathfrak{g}}}$ の上に

$$(t^{\frac{1}{2}})^{\theta} = -t^{\frac{1}{2}}$$

として延長することができる．そこで，

$$\widehat{\widehat{\mathfrak{g}}}^{\theta} = \{ x \in \widehat{\widehat{\mathfrak{g}}} \mid x^{\theta} = x \}$$

と定義する．容易にわかるように，

$$\widehat{\widehat{\mathfrak{g}}}^{\theta} = (\mathfrak{g}_+ \otimes K[t, t^{-1}]) \oplus (\mathfrak{g}_- \otimes t^{\frac{1}{2}} K[t, t^{-1}]) \oplus Kc$$

となる．

$K \otimes \Lambda$ を可換リー代数とみなし，位数2の自己同型 θ を，

$$\theta : \lambda \to -\lambda$$

で定義すれば，

$$\Lambda_+ = 0, \quad \Lambda_- = \Lambda$$

となる．ゆえに，

$$\widehat{\widehat{\Lambda}}^{\theta} = \Lambda \otimes t^{\frac{1}{2}} K[t, t^{-1}] \oplus Kc$$

である．この場合 θ は標準的なものなので，$\hat{\hat{\Lambda}}^{\theta}=\hat{\Lambda}_{\frac{1}{2}}$ と書くことにする（ハット記号も1つにして）．すなわち，

$$\hat{\Lambda}_{\frac{1}{2}}=\Lambda\otimes t^{\frac{1}{2}}K[t,t^{-1}]\oplus Kc$$

さらに，

$$\hat{\Lambda}^{-}=\coprod_{n<0}(K\otimes\Lambda)\otimes t^{n}$$

$$\hat{\Lambda}_{\frac{1}{2}}^{-}=\coprod_{n<0}(K\otimes\Lambda)\otimes t^{\frac{1}{2}+n}$$

と定義する．これで対称積代数 $S(\hat{\Lambda}^{-})$，$S(\hat{\Lambda}_{\frac{1}{2}}^{-})$ は完全に定まった．

次に $K\{\Lambda\}$ を定義しよう．Λ を可換群とみて，完全系列

$$0\to Z_2\to\tilde{\Lambda}\xrightarrow{f}\Lambda\to 0$$

を考えよう．$\lambda\in\Lambda$ の f による逆像の1つを e^{λ} と書く．$Z_2=\langle\pm 1\rangle$ であり，その $\tilde{\Lambda}$ の中への像を $\langle z\rangle$ と書こう．$\tilde{\Lambda}$ の構造は，

$$e^{\alpha}e^{\beta}=z^{\langle\alpha,\beta\rangle}e^{\beta}e^{\alpha},\quad e^{\alpha}e^{-\alpha}=z^{\langle\alpha,\alpha\rangle/2}e^{0}$$

と定めることによりただ1つに定まる．そこで，

$$K\{\Lambda\}=\frac{K[\tilde{\Lambda}]}{\langle z+1\rangle}$$

とおく．すなわち，$K\{\Lambda\}$ は $\tilde{\Lambda}$ の群環 $K[\tilde{\Lambda}]$ において，z を -1 に書き替えたものなのである．$K\{\Lambda\}$ は $e^{\alpha}\in K[\tilde{\Lambda}]$ の $K\{\Lambda\}$ における像（それも e^{α} と書く）によって生成されるから，ベクトル空間としては同型だが，$K[\Lambda]$ が可換環になるのに対し，$K\{\Lambda\}$ は可換ではない．$K\{\Lambda\}$ は $\mathrm{wt}(e^{\alpha})=\dfrac{\langle\alpha,\alpha\rangle}{2}$ によって自然に重さの付いたベクトル空間になる．テンソル積

$$S(\hat{\Lambda}^{-})\otimes K\{\Lambda\}$$

にテンソル積の重さ $\mathrm{wt}(s\otimes t)=\mathrm{wt}(s)+\mathrm{wt}(t)$ を入れる．

次に，

$$S(\widehat{\Lambda}^-)\otimes K\{\Lambda\}$$

の上のベクトル空間としての自己同型 θ を

$$\theta(\lambda\otimes t^n)=-\lambda\otimes t^n$$
$$\theta(e^\alpha)=(e^\alpha)^{-1}(-1)^{\langle\alpha,\alpha\rangle/2}$$

として決める．これにより，

$$(S(\widehat{\Lambda}^-)\otimes K\{\Lambda\})^\theta$$

が完全に定まる．

次に $V^\natural$ の第 2 項目の

$$(S(\widehat{\Lambda}^-_{\frac{1}{2}})\otimes T)^\theta$$

の記述に移る．$S(\widehat{\Lambda}^-_{\frac{1}{2}})$ はすでに説明した．T は Q の忠実な 2^{12} 次の表現を 3. 2 で述べた群 C_2 に持ち上げたものである．T の核 N は位数 2 の群であるが，C_2 を N で割った剰余群が，モンスター $\mathbb{M}$ のシロー 2 群の中心に属する位数 2 の元 z の中心化群 $C=C_{\mathbb{M}}(z)$ に等しいわけではない．しかし T は C の射影表現を与えている．自己同型 θ の $S(\widehat{\Lambda}^-_{\frac{1}{2}})$ への作用は $S(\widehat{\Lambda}^-)$ のときと同じく，

$$\theta(\lambda\otimes t^n)=-\lambda\otimes t^n$$

で，T への作用は，

$$\theta(t)=-t$$

と決める．

これで，$V^\natural$ の（単に空間としての）構造は完全に定まったことになる．次の節でこの $V^\natural$ に頂点作用素代数としての構造が入ることを簡単に記す．代数であるから，その上の自己同型群を考えることができる．$V^\natural$ はムーンシャイン加群と呼ばれる．もちろんそう呼ばれるのは，$V^\natural$ の上にモンスター $\mathbb{M}$ が自己同型群として作用していることが証明できるからである．$V^\natural$ の上に確か

に $\mathbb{M}$ が作用していることの証明はフレンケル・レパウスキー・マーモンの著書[*1)]では実に複雑で見通しが悪い．宮本雅彦が $V^\natural$ の自己同型群が有限群であることを頂点作用素代数の理論だけを使って独立に示す方法を得ている．宮本の理論は第 6 章でその一部を述べる．

5.2　頂点作用素代数

前節ではムーンシャイン加群 $V^\natural$ を定義した．$V^\natural$ は頂点作用素代数となっている．この節では，頂点作用素代数を定義し，その例，性質などについて記述する．

頂点作用素なる概念には，物理学者が 1970 年前半に，当時盛んに研究されていた弦理論を使って到達している．物理学者は頂点作用素からなる集合を代数としては研究対象にしなかったようだが，数学者がそれを 1980 年代に公理化した．まず，ボーチャズが 1984 年に短い論文を発表して，頂点代数の公理を提出し，その理論の骨格を述べた．その後，フレンケル・レパウスキー・マーモンがさらにきちんとした公理系を提出した．頂点作用素代数の公理は複雑である．たぶん，必要以上に複雑なのだろう．将来，それを超えた代数が見出されて，公理系が簡易化されることを望む．群の公理系は簡明であり，そしてそれが将来変更されるとは思えない．それに比べて頂点作用素代数は公理系が複雑でその例を作ることですら容易ではない．

まず，ボーチャズの公理系を述べよう．次の条件（1）～（4）を満たす集合 V を**頂点代数**（vertex algebra）と呼ぶ．

（1）V は標数 0 の体 K 上のベクトル空間で（ここでも $K=\mathbb{R},\mathbb{C}$ と仮定して失うものはほとんどない），V の任意の元 v と，任意の $n\in\mathbb{Z}$ に対して，$\mathrm{End}(V)$ の元 v_n が与えられている．

（2）V の任意の 2 元 u,v に対して，整数 n が存在して，すべての $k\geqq n$ に対して，$u_k v=0$ となる．

（3）V の任意の 3 元 u, v, w と任意の整数 m, n, q に対して次の等式が成

*1)　あとがきの中の文献［12］．

り立つ．

$$\sum_{i\in\mathbb{N}}\binom{m}{i}(u_{q+i}v)_{m+n-i}w$$
$$=\sum_{i\in\mathbb{N}}(-1)^i\binom{q}{i}[u_{m+q-i}(v_{n+i}w)-(-1)^q v_{n+q-i}(u_{m+i}w)]$$

（4）V は $\mathbf{1}$ と書かれ，真空と呼ばれる元を含んでいて，V のすべての元 v に対して，$v_{-1}\mathbf{1}=v$，そして，$n\geqq 0$ ならば，$v_n\mathbf{1}=0$ を満たしている．

頂点作用素代数は，まず頂点代数としてボーチャズによって公理化されたのである．すべての $v\in V$ と $n\in\mathbb{Z}$ に対して，$v_n\in\mathrm{End}(V)$ が与えられているのだが，u_nv を u と v の双線形な積とみれば，V は各 $n\in\mathbb{Z}$ に対して代数構造を持っているわけである．V が代数と呼ばれるゆえんである．なぜ頂点作用素と呼ばれるかは物理学を学ばないとわからない．それについては第7章で述べる．

無限個の $n\in\mathbb{Z}$ に対して $v_n\in\mathrm{End}(V)$ が定義されているのだが，それら無限個の作用素の間の演算を考えていくのである．無限個あるのだから，考えたものがしっかりと定義されている（**well-defined**）かどうかが常に問題となる．それには，少なくとも（**2**）で要求する「上に有界」という条件が必要になってくる．十分大きい $n\in\mathbb{Z}$ に対して線形写像として $u_n=0$ となっているわけではない．各 $v\in V$ に対して $n=n(u,v)$ があってすべての $k\geqq n$ に対して $u_kv=0$ となっているのである．

物理学では正整数 n に対する u_n は**消滅作用素**と呼ばれている．v を1つの量子状態とすると，正の n に対する u_n を v に作用させて，$u_nv\in V$ を作ると，u_nv の持つエネルギーは v のそれより小さくなる．現宇宙に存在する量子状態のエネルギーには下限があるので，十分大きい n に対しては $u_nv=0$ となるのである．

数学者としては，負の n に対して，$u_nv=0$ になる方が定義としては気持ちがよい．物理学では，$n\in\mathbb{N}$ に対して，a_n を**生成作用素**と呼び，$a_n^\dagger$（†: *dagger*, 短剣）を消滅作用素と呼んでいた．ところが,「†」がプラス記号と読み違えられたり，書き違えられたりするようになると，プラス記号も使われるようになってきたらしい．短剣がものを消してしまうのは納得できるが，プラ

ス記号が消してしまうのは気分的に良くない．

条件(3)は V の元 u, v と $\mathbb{Z}$ の元 m, n に対する u_m, v_n の間の相互関係を与えている．数学では $i<0$ のとき 2 項係数は $\binom{m}{i}=0$ と定義されているから，$\sum_{i\in\mathbb{N}}$ の $\mathbb{N}$ は $\mathbb{Z}$ に置き換えても内容は変わらない．(3)の左辺で，$u_{q+i}v$ の i は条件(2)によって上に有界だから，有限和である．右辺は $v_{n+i}w, u_{m+i}w$ を見ることによってやはり有限和であることを知る．(3)の条件で w を省いてしまうと，左辺は有限和，右辺は無限和となってしまう．ただし(2)があるので，w を省いてしまっても $\mathrm{End}(V)$ の中の等式としては定義されている．(4)は V 全体が真空元 $\mathbf{1}$ と v_{-1} の $\mathbf{1}$ に対する作用からできていることを要求している．

リー代数 $\mathfrak{g}$ に対する展開環 $U(\mathfrak{g})$ のような作り方であるが，頂点代数は形式的に構成することができる．とすると，もう少し条件があった方がよいということである．

フレンケル・レパウスキー・マーモンはムーンシャイン加群 $V^\natural$ を構成する過程で次の条件(5)～(10)をボーチャズの(1)～(4)に加えて，それを頂点作用素代数の公理系とした．以下，

$$Y(v,z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n z^{-n-1}$$

とおく．$Y(v,z)$ は v の**頂点作用素**と呼ばれる．

(5) $V=\coprod_{n\in\mathbb{Z}} V_n$ と直和に書けていて，すべての $n\in\mathbb{Z}$ に対して V_n は有限次元である．

(6) 十分小さい n に対しては常に $V_n=0$.

(7) $Y(\mathbf{1},z)=Id$. Id は $\mathrm{End}(V)$ の単位元である．

(8) V_2 はヴィラソロ元と呼ばれる元 ω を含み

$$Y(\omega,z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} L(n) z^{-n-2}$$

とおくとき(すなわち，$\omega_n=L(n-1)$)，

$$[L(m),L(n)]=(m-n)L(m+n)+\frac{1}{12}(m^3-m)c\delta_{m+n,0}$$

となっている．ただし，c はある一定の K の元である．(この c は K の元

であり，アフィンリー代数の定義の c はベクトルである．紛らわしいが慣用に従う.）

(9) 任意の $n\in\mathbb{Z}$ と任意の $v\in V_n$ に対して，

$$L(0)v=nv$$

が成立している．

(10) 任意の $v\in V$ に対して

$$\frac{d}{dz}Y(v,z)=Y(L(-1)v,z)$$

が成立している．

頂点作用素代数の公理系 (1)～(10) が 1 つ与えられたのであるが，(5)～(10) を加えると，実例を作ることが困難になる．また，(5) と (6) 以外を満たす有用な頂点代数があることなどから，公理系 (1)～(10) が真に最終的なものと言えるかどうかは将来の研究に待つ他ないであろう．

条件 (3) は複雑であるが，元 v の頂点作用素

$$Y(v,z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}v_nz^{-n-1}$$

を使うと条件

(3′)

$$z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_1-z_2}{z_0}\right)Y(u,z_1)Y(v,z_2)w-z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_2-z_1}{-z_0}\right)Y(v,z_2)Y(u,z_1)w$$
$$=z_2^{-1}\delta\left(\frac{z_1-z_0}{z_2}\right)Y(Y(u,z_0)v,z_2)w$$

と同等になる．ここで，

$$\delta(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}z^n$$

であり，

$$\delta\left(\frac{z_1-z_2}{z_0}\right)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\frac{z_1-z_2}{z_0}\right)^n$$

等は次の規則によって，$z_0^iz_1^jz_2^k$ 等の項の和として書く．

n が正のときは問題ない．n が負のときは

$$(a-b)^n=\sum_{i=0}^{\infty}\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} a^{n-i}(-b)^i$$

と定義する．注意することは第2成分 b のベキは常に非負の整数である．特に $(a-b)^n$ と $(-b+a)^n$ は n が負のときは同じではない．

上に述べた規則に従って展開し，i, j, k を適当にとり，両辺を比較すると(3)が得られる．

(3)または(3′)が頂点作用素代数の公理系の中では最も重要なものである．(3)は複雑ではあるが $\mathrm{End}(V)$ の元 $\{v_n : v\in V, n\in\mathbb{Z}\}$ の関係は「目に見える」．(3′)となると形は整った感じはするが，v_n 間の関係はよく見えない．しかし，さらに見えなくすることも可能である．

(3″) 任意の $u, v\in V$ に対して，正整数 N が存在して，

$$(z_1-z_2)^N[Y(u,z_1),Y(v,z_2)]=0$$

となる．

(3)または(3′)の代わりに(3″)を公理系に入れても良い．ただし，(3″)が(3)または(3′)と同値と主張しているわけではない．(3″)が数学的には最も簡明であり，本質をついていると思われる．条件(3″)は**局所可換性**と呼ばれている．頂点作用素代数の一般論から $z_1\neq z_2$ のとき $Y(u,z_1)Y(v,z_2)$ と $Y(v,z_2)Y(u,z_1)$ は相関関数として同じ有理関数を定義することがわかっている．この(3″)を中心に据えて，頂点作用素代数，またはそれを超えるものを公理化していくことは将来の課題と思われる．

ムーンシャイン加群 $V^\natural$ は頂点作用素代数となっているのだが，そのことを証明するのはなかなか難しい．$V^\natural$ は2つの加群の直和として

$$V^\natural=(S(\widehat{\Lambda}^-)\otimes K\{\Lambda\})^\theta\oplus(S(\widehat{\Lambda}^-_{\frac{1}{2}})\otimes T)^\theta$$

と書けていた．まず，

$$V_\Lambda=S(\widehat{\Lambda}^-)\otimes K\{\Lambda\}$$

が頂点作用素代数になることを説明しよう．リーチ格子である必要はないので，L を正定値な偶格子とする．

$$V_L = S(\widehat{L}^-) \otimes K\{L\}$$

の構成は $L = \Lambda$ の場合と同じである．正定値にしないと，各 V_n の次元が有限になってくれない．また，偶格子でないと，ねじれのある $K\{L\}$ を作るときにも困る．任意の $v \in V_L$ と任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して，$v_n \in \mathrm{End}(V)$ を定義するのであるが，個々の $n \in \mathbb{Z}$ に対して決めていくわけではない．頂点作用素代数の公理系のところで定義したように v の頂点作用素

$$Y(v,z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n z^{-n-1}$$

を決めるのである．すなわち，$v \in V_L$ を決めると，すべての $n \in \mathbb{Z}$ に対して v_n が一斉に決まるのである．

個々の $n \in \mathbb{Z}$ に対しての v_n の性質も興味あるものであるが，頂点作用素代数の本質は，$Y(v,z)$ に隠されている．すなわち，すべての $n \in \mathbb{Z}$ に関する v_n の母関数である $Y(v,z)$ で述べられる命題が頂点作用素代数の本質的な性質と思うべきである．

L の元を一般に α で表わし，L を可換群と見たときの群環 $K[L]$ の中の対応する元を e^α で表わし，ねじれのある群環 $K\{L\}$ の中の対応する元も e^α で表わす：

$$\alpha \longleftrightarrow e^\alpha$$

ベクトル空間としては

$$S(\widehat{L}^-) \otimes K[L]$$

を考えていると思ってもよい．

物理学者が頂点作用素を定義するときは，α または，e^α をそのまま使い，ねじれのある群環 $K\{\Lambda\}$ は導入しない．その代わり，頂点作用素にコホモロジーから来る補正を後で加えて，頂点作用素間の交換関係が期待通りのものになるようにする．数学者はコホモロジーによる補正をねじれのある群環 $K\{L\}$ として初めから導入する．

V_L は，

$$v=\alpha_1(-n_1)\cdots\cdots\alpha_k(-n_k)\otimes e^{\alpha},\quad \alpha_j,\alpha\in L,\quad n_j\in\mathbb{Z}_+$$

という形の元で張られている．まず，

$$v=1\otimes e^{\alpha}=e^{\alpha}$$

という形の $v\in V_L$ に対して頂点作用素 $Y(v,z)$ を定義しよう．

$$E^+(\alpha,z)=\exp\left(\sum_{n>0}\frac{\alpha(n)}{n}z^{-n}\right)$$
$$E^-(\alpha,z)=\exp\left(\sum_{n<0}\frac{\alpha(n)}{n}z^{-n}\right)$$

とおく．$E^{\pm}(\alpha,z)$ を使って，

$$Y(e^{\alpha},z)=E^-(-\alpha,z)e^{\alpha}z^{\alpha}E^+(-\alpha,z)$$

と定義する．

上式の各々の項が

$$V_L=S(\widehat{L}^-)\otimes K\{L\}$$

に作用していることを見てゆこう．$Y(e^{\alpha},z)$ を z のベキに関して展開したときにその各々の係数が

$$V_L=S(\widehat{L}^-)\otimes K\{L\}$$

の上の作用しているのである．$e^{\alpha}, z^{\alpha}, \alpha(n)$ と書かれているが V_L への作用は，

$$e^{\alpha}=1\otimes e^{\alpha}$$
$$z^{\alpha}=1\otimes z^{\alpha}$$
$$\alpha(n)=\alpha(n)\otimes 1$$

としてテンソル積 $V_L=S(\widehat{L}^-)\otimes K\{L\}$ の各成分に作用している．1 は対応する成分の上の恒等写像である．ゆえに，

$$Y(e^{\alpha},z)=E^-(-\alpha,z)E^+(-\alpha,z)e^{\alpha}z^{\alpha}$$

と書いてもよい．$E^-(-\alpha,z)$ と $E^+(-\alpha,z)$ は可換でなく，e^α と z^α も可換ではない．e^α の $1\otimes e^\beta$ 上の作用は，

$$e^\alpha\cdot(1\otimes e^\beta)=1\otimes e^\alpha e^\beta\in 1\otimes K\{L\}$$

と定義される．z^α の作用は

$$z^\alpha\cdot(1\otimes e^\beta)=(1\otimes e^\beta)z^{\langle\alpha,\beta\rangle}$$

と定義する．よって，$z^\alpha\in\mathrm{End}(V_L)$ とは言えない．しかし，$f_n\in\mathrm{End}(V_L)$ を

$$f_n:1\otimes e^\beta \begin{array}{l}\nearrow\ \ 1\otimes e^\beta \qquad (\langle\alpha,\beta\rangle=n\ \text{のとき})\\ \searrow\ \ \ 0 \qquad\quad\ \ (\text{その他のとき})\end{array}$$

と定義すると

$$z^\alpha=\sum_{n\in\mathbb{Z}}f_n z^n$$

と書けるので最終的に

$$Y(v,z)=Y(e^\alpha,z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}v_n z^{-n-1}$$

の形に書くときには z^α も支障は生じない．個々の元への z^α の作用を実際に計算するときは z^α を無限和にする必要はない．

次に $\alpha\in L$，$n\in\mathbb{Z}$ のとき，$\alpha(n)$ の $S(\widehat{L}^-)$ の上への作用を決めよう．実は，この $S(\widehat{L}^-)$ は表記を簡単にするためにこのように書いたのだが，

$$S(\widehat{L}^-)\longleftrightarrow U(\widehat{L}')\underset{S(\widehat{L}^+)\oplus Kc}{\otimes}Kv_0$$

と書ける $U(\widehat{L}')$ 加群と同一視しているのである．ここで $U(\widehat{L}')$ はリー代数 $\widehat{L}'=\coprod_{n\in\mathbb{Z},n\neq 0}(K\otimes L\otimes t^n)\oplus Kc$ の展開環である．

Kv_0 は 1 次元の $S(\widehat{L}^+)\oplus Kc$ 加群で，

$$c\cdot v_0=v_0$$

$$\alpha(n)\cdot v_0=0,\quad n>0$$

と定義する．ポアンカレ・バーコフ・ヴィット（H. Poincare - G. Birkhoff - E. Witt）の定理を使えば，$U(\widehat{L}')$ の基底として集合

$$\{\alpha_1(n_1)\alpha_2(n_2)\cdots\alpha_k(n_k)c^e \mid n_1 \leqq n_2 \leqq \cdots \leqq n_k\}$$

をとることができ，$cv_0 = v_0$ であって，$n > 0$ のとき $\alpha(n)v_0 = 0$ となることを使えば，

$$U(\widehat{L}') \underset{S(\widehat{L}^+)\oplus Kc}{\otimes} Kv_0$$

はベクトル空間としては

$$S(\widehat{L}^-) \otimes Kv_0$$

と同一視できることがわかり，$S(\widehat{L}^-) \otimes Kv_0$ はさらに，$S(\widehat{L}^-)$ と同一視できる．すなわち

$$S(\widehat{L}^-) \otimes K\{L\}$$

の第 1 項 $S(\widehat{L}^-)$ は $U(\widehat{L}')$ 加群なのである．$\alpha(n) = \alpha(n) \otimes 1$ が作用することはわかった．$Y(e^\alpha, z)$ の定義には必要ないのだが，$\widehat{L}'$ に入っていない $\alpha(0)$ の作用も後で必要なのでここで与えておこう．$\alpha(0)$ は

$$\alpha(0) = 1 \otimes \alpha(0)$$

として，

$$S(\widehat{L}^-) \otimes K\{L\}$$

の第 2 項に作用し，

$$\alpha(0) \cdot (1 \otimes e^\beta) = \langle \alpha, \beta \rangle 1 \otimes e^\beta$$

と定義する．

これで

$$Y(e^\alpha, z) = \exp\left(-\sum_{n<0} \frac{\alpha(n)}{n} z^{-n}\right) e^\alpha z^\alpha \exp\left(-\sum_{n>0} \frac{\alpha(n)}{n} z^{-n}\right)$$

を z のベキについて展開したときの

$$V_L = S(\widehat{L}^-) \otimes K\{L\}$$

への作用はすべて定まったことになる．残る問題は，z の各ベキについて係数の和が $\mathrm{End}(V_L)$ の元として定義できているかということだけである．次にそれを示す．$S(\widehat{L}^-)\otimes K\{L\}$ の任意の元は

$$v=\alpha_1(-n_1)\alpha_2(-n_2)\cdots\alpha_k(-n_k)\otimes e^{\beta}, \qquad n_1\geqq n_2\geqq\cdots\geqq n_k>0$$

という形の元の線形結合で書けるから，$Y(e^{\alpha},z)$ がどのようにこの v の上に作用するかを調べよう．正整数 n が，

$$n>n_i, \quad 1\leqq i\leqq k$$

のときは，

$$[\alpha(n),\alpha(-n_i)]=0$$

であるから，$n>n_1$ ならば，

$$\alpha(n)v=0$$

となる．ゆえに，

$$\exp\left(-\sum_{n>0}\frac{\alpha(n)}{n}z^{-n}\right)v=\exp\left(-\sum_{n_1\geqq n>0}\frac{\alpha(n)}{n}z^{-n}\right)v$$

となり，exp 関数の括弧内の $\sum$ は有限和となった．交換子関係

$$\alpha(n)\gamma(m)=\gamma(m)\alpha(n)+n\langle\alpha,\gamma\rangle\delta_{m+n,0}\,c$$

を使うと，

$$\begin{aligned}&\alpha(n)\alpha_1(-n_1)\cdots\alpha_k(-n_k)\otimes e^{\beta}\\&=\alpha_1(-n_1)\alpha(n)\alpha_2(-n_2)\cdots\alpha_k(-n_k)\otimes e^{\beta}\\&\quad+n\langle\alpha,\alpha_1\rangle\delta_{n-n_1,0}\alpha_2(-n_2)\cdots\alpha_k(-n_k)\otimes e^{\beta}\end{aligned}$$

となる．同様な操作を $\alpha(n)$ と $\alpha_2(-n_2)\cdots\alpha_k(-n_k)$ に繰り返すと，

$$\alpha(n)\alpha_1(-n_1)\cdots\alpha_k(-n_k)\otimes e^{\beta}$$

は集合 $\{\alpha_i(-n_i)\}_{i=1}^k$ から $k-1$ 個だけ取り出し，それらの積を作り，そのような項の k 個の線型結合に $\otimes e^\beta$ を付けたものであることがわかる．ゆえに，

$$\alpha(n)^{k+1}\alpha_1(-n_1)\alpha_2(-n_2)\cdots\alpha_k(-n_k)\otimes e^\beta=0$$

となり，

$$\exp\left(-\sum_{n>0}\frac{\alpha(n)}{n}z^{-n}\right)v$$

は，$\mathrm{End}(V_L)$ の元を係数とする z^{-1} の多項式となる．

z^α は $1\otimes z^\alpha$ として作用し，z のベキを変更するだけである．e^α の作用も容易である．最後の

$$\exp\left(-\sum_{n<0}\frac{\alpha(n)}{n}z^{-n}\right)$$

は，$\sum$ の意味でも exp の意味でも無限和だが，

$$e^\alpha z^\alpha\exp\left(-\sum_{n>0}\frac{\alpha(n)}{n}z^{-n}\right)\alpha_1(-n_1)\cdots\alpha_k(-n_k)\otimes e^\beta$$

が有限個の z のベキしか含まないので，

$$Y(e^\alpha,z)(\alpha_1(-n_1)\cdots\alpha_k(-n_k)\otimes e^\beta)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}f(n)z^{-n-1}$$

$f(n)\in V_L$ の形に書ける．任意の v に対してそのように書けるのだから

$$Y(e^\alpha,z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(e^\alpha)_n z^{-n-1}$$

$(e^\alpha)_n\in\mathrm{End}(V_L)$ という形に書けることになる．

次に V_L の元

$$v=\alpha_1(-n_1)\cdots\alpha_k(-n_k)\otimes e^\beta$$

に対しての頂点作用素 $Y(v,z)$ は

$$\begin{aligned}Y(v,z)=:&\left(\frac{1}{(n_1-1)!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{n_1-1}\alpha_1(z)\right)\cdots\\&\left(\frac{1}{(n_k-1)!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{n_k-1}\alpha_k(z)\right)Y(e^\beta,z):\end{aligned}$$

と定義する．未定義の項が含まれているのでそれを説明しよう．まず $\alpha\in L$ のとき

$$\alpha(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\alpha(n)z^{-n-1}$$

である．先に定義した $\alpha(0)$ の作用がここで必要になってくる．残りは記号「:　:」である．これは**正規積**を作るための記号である．

$$\begin{aligned}:\alpha_1(n_1)\alpha_2(n_2):&=\alpha_1(n_1)\alpha_2(n_2),\quad n_1\leqq n_2 \text{ のとき}\\&=\alpha_2(n_2)\alpha_1(n_1),\quad n_1>n_2 \text{ のとき}\end{aligned}$$

と定義する．これで頂点作用素 $Y(v,z)$ が定義できている．

残っていることは

(1) V_L と $Y(v,z)$ が頂点作用素代数の公理 (1)～(10) を満たすこと示す．

(2) L をリーチ格子 Λ に置き換え，V_Λ の位数 2 の線型写像 θ を定義すること．($(V_\Lambda)^\theta$ を θ の V_Λ の上の固定点の集合とする．以下同様.)

(3) $(S(\widehat{\Lambda}^-_{\frac{1}{2}})\otimes T)^\theta$ を定義すること．

(4) $V^\natural=(S(\widehat{\Lambda}^-)\otimes K\{\Lambda\})^\theta\oplus(S(\widehat{\Lambda}^-_{\frac{1}{2}})\otimes T)^\theta$ が頂点作用素代数であることを示すこと．

(5) モンスターが $V^\natural$ の自己同型群として作用すること．

などである．(2)，(3) は前節で述べた．(4) の $V^\natural$ の第 2 項は第 1 項の加群となっていて，そのままでは頂点作用素代数とはならない．(5) を証明する過程で，$V^\natural$ の自己同型 σ で第 1 項と第 2 項を交ぜ合わせるものを定義し，σ の作用のよって第 1 項の頂点作用素を $V^\natural$ 全体に広げていくのである．しかしその過程は複雑でありこれ以上は述べない．

5.3　ボーチャズの理論

モンスターという散在型単純群の発見 (1973)，その構成 (1982)，マッカイ・トンプソンによるモンスターの表現と保型関数とに関する予想 (1979)，コンウェイ・ノートンによる 171 個の保型関数の構成とその予想 (1979)，コンウェ

イ・ノートン予想を証明するのに必要なムーンシャイン加群のフレンケル・レパウスキー・マーモンによる構成（1980 年代）などについて前章と本章で述べてきた．

コンウェイ・ノートンの構成した 171 個の保型関数がムーンシャイン加群 $V^\natural$ から得られるものと同じであるということ（すなわち，正しいものであること）は，ボーチャズが証明した（1992，あとがきの文献［16］）．本節ではその理論を紹介する．

ムーンシャイン加群 $V^\natural=\coprod_{n\geqq 0} V_n$ はすでに構成されているのだから，残っている仕事は，モンスター $\mathbb{M}$ の任意の元 g とすべての $n\geqq 0$ に対して V_n における g の指標の値 $\chi_n(g)$ を計算すればよい．そして得られた式，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\chi_n(g)q^{n-1},\quad q=e^{2\pi iz},\ z\in H$$

がコンウェイ・ノートンの与えた保型関数に一致していることを証明すればよい．

$g\in\mathbb{M}$ の V_n における値を計算するのは困難なことである．$V^\natural$ の構成方法は前節でその概略を述べたようにきわめて複雑なものであり，モンスター $\mathbb{M}$ が，実際，各 V_n に作用していることを確認することも容易ではない．ボーチャズは任意の n に対する $\chi_n(g)$ が，指標 $\chi_2, \chi_3, \chi_4, \chi_6$ のすべての i に対してのベキ g^i での値により定まることを証明したのである．特に指標 χ_2, χ_3, χ_4, χ_6 が一意に定まっていれば，χ_n も一意に定まっている．χ_2, χ_3, χ_4, χ_6 が一意に定まっていることを示すためには，モンスター加群 V_2, V_3, V_4, V_6 の既約表現への分解が一意に定まっていることを言えばよい．ボーチャズはその分解がコンウェイ・ノートンが予想として提出したものと一致することを示したのである．

出発点は，フレンケル・レパウスキー・マーモンによって構成されたムーンシャイン加群 $V=V^\natural$ である．ボーチャズは次の性質だけ使う．

（1）V は実数体 $\mathbb{R}$ 上の頂点作用素代数．

（2）V は階数 24 の共形元 ω を持つ（すなわち，頂点作用素代数の公理（8）（113～114 ページ）の c が 24 に等しい．）

（3）V は正定値対称双 1 次形式 $\langle\ ,\ \rangle$ を持つ．

（4）v_n, $v \in V_h$, の $\langle\ ,\ \rangle$ に関する随伴作用素は

$$(-1)^h \sum_{i \geqq 0} \frac{1}{i!} (L(1)^i v)_{2h-i-n-2}$$

に等しい.

（5）$V = \coprod_{n \geqq 0} V_n$ と直和に書け，V_n は $L(0)$ の固有値 n に対応する固有空間である.

（6）$\sum_{n \geqq 0} \dim V_n q^{n-1} = J(z) = j(z) - 744 = \dfrac{1}{q} + 196884q + \cdots$

（7）モンスター $\mathbb{M}$ は V に双 1 次形式 $\langle\ ,\ \rangle$ を持つ頂点作用素代数の自己同型として作用する．特に，真空元 $\mathbf{1}$，共形元 ω を不変にする.

（8）$\{\chi_i\}_{i=1}^7$ を $\mathbb{M}$ の次数の小さい方から数えて最初の 7 個の既約表現（付録 2 参照）とするとき，

$$V_2 = \chi_1 + \chi_2,\ V_3 = \chi_1 + \chi_2 + \chi_3,\ V_4 = 2\chi_1 + 2\chi_2 + \chi_3 + \chi_4,$$
$$V_6 = 4\chi_1 + 5\chi_2 + 3\chi_3 + 2\chi_4 + \chi_5 + \chi_6 + \chi_7$$

と分解する.

$U = \mathbb{Z}u_1 \oplus \mathbb{Z}u_2$ を $\mathbb{Z}$ 上の 2 次元の自由加群（格子）としよう．基底 $\{u_1, u_2\}$ を使って，U の元を $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ のように表わす.

$$\langle (m,n) \mid (m',n') \rangle = -mn' - nm'$$

と定義して U 上に双 1 次形式を入れる．U の基底 $\{u_1, u_2\}$ に対応する内積 $\langle\ ,\ \rangle$ の行列表示は

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

である．ユニモデュラーな偶形式であるが不定値である.

前節で述べた方法によって U から，頂点代数 V_U を構成することができる.

$$V_U = S(\widehat{U}^-) \otimes \mathbb{R}\{U\} = \coprod_{i \in \mathbb{Z}} V_{U,i}$$

である．$\alpha = (m,n) \in U$ のとき，対応する $\mathbb{R}\{U\}$ の元 e^α の重さは $\mathrm{wt}\,(e^\alpha) = \langle (m,n) \mid (m,n) \rangle / 2 = -mn$ で与えられる．U の内積が不定値なので，$V_{U,i}$ の

i は上にも下にも有界とはならない．それゆえ，V_U は頂点作用素代数の公理(6)を満たしていない．しかし(1)〜(4)は満たしている．そればかりでなく(7)〜(10)も満たしている．V_U はほとんど頂点作用素代数と言ってよい．

ムーンシャイン加群である頂点作用素代数 $V^\natural$ はすでにできているので，

$$W = V^\natural \otimes V_U$$

というテンソル積を作る．この W は以下のようにして頂点代数とすることができる．W の元の次数（重さ）は通常のテンソル積次数とする．すなわち，

$$W_n = \coprod_{i\in\mathbb{Z}} V_i^\natural \otimes V_{U,n-i}$$

W の真空元としては自明なもの

$$\mathbf{1}_W = \mathbf{1}_{V^\natural} \otimes \mathbf{1}_{V_U}$$

でよいし，ヴィラソロ元は，

$$\omega_W = \omega_{V^\natural} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \omega_{V_U}$$

とする．さらに，$a\in V^\natural$, $b\in V_U$ に対して $(a\otimes b)_n \in \mathrm{End}(V^\natural \otimes V_U)$ を，

$$(a\otimes b)_n(c\otimes d) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} (a_i c)\otimes(b_{n-1-i}d)$$

とすればよい．これが有限和になっていること，十分大きな n に対しては，上の式が 0 となることも容易にわかる．テンソル積 $W = V^\natural \otimes V_U$ が頂点代数としての必要な条件を満足することは証明しなければならないが，それは一般論なので省略しよう．

次に**キャッツ・ムーディ**（V. G. Kac - R. V. Moody）**代数**を復習する．$n\times n$ 実行列 $A=(a_{ij})$ に対して次の条件を考える．

(1) $a_{ii}=2$.

(2) $i\neq j$ のときは，a_{ij} は 0 または負の整数.

(3) $a_{ij}=0$ と $a_{ji}=0$ は同値.

この(1)〜(3)の性質を満たす行列を**一般カルタン行列**と言う．半単純リー代数論にもカルタン行列というものが現われた．カルタン行列はリー代数 $\mathfrak{g}$

のカルタン部分代数 $\mathfrak{h}$ とその双対空間の元とから自然に作られる行列である．（古典的な）カルタン行列の行列式は 0 ではないが，一般カルタン行列では0となり得る．

一般カルタン行列 $A=(a_{ij})$ の**実現**（realization）というのは3つの集合の組 $(\mathfrak{h},\Pi,\Pi^\vee)$ であって，

（1）$\mathfrak{h}$ は複素ベクトル空間，

（2）$\Pi=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ は $\mathfrak{h}^*=\mathrm{Hom}(\mathfrak{h},\mathbb{C})$ の線形独立な部分集合（$\mathfrak{h}^*$ は $\mathfrak{h}$ の双対空間），

（3）$\Pi^\vee=\{\alpha_1^\vee,\cdots,\alpha_n^\vee\}$ は $\mathfrak{h}$ の線形独立な部分集合，

（4）$\langle\alpha_i^\vee,\alpha_j\rangle=\langle\alpha_j,\alpha_i^\vee\rangle=\alpha_j(\alpha_i^\vee)=a_{ij}$,

（5）$n-l=\dim\mathfrak{h}-n$, $\mathrm{rank}\,A=l$.

半単純群リー代数のカルタン行列に対しては $\mathrm{rank}\,A=l=n$ だから，$n=l=\dim\mathfrak{h}$ となっている．（5）の条件は，A の行列としての退化数 $n-l$ の分だけカルタン部分代数を本来の $n=l$ 次元よりも膨らますことによって，理にかなうリー代数を作ろうとしているのである．一般カルタン行列 A の2つの実現 $(\mathfrak{h},\Pi,\Pi^\vee)$，$(\mathfrak{h}_1,\Pi_1,\Pi_1^\vee)$ の同値性，2つの一般カルタン行列 A_1, A_2 の実現の直和なども自然に定義できる．

さて，A を一般カルタン行列とし，$(\mathfrak{h},\Pi,\Pi^\vee)$ をその実現としたとき，それに付随するキャッツ・ムーディ代数を定義しよう．まず，リー代数 $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ を次の生成元と関係式で定義する．

（1）$\tilde{\mathfrak{g}}(A)=\langle e_i,f_i,\mathfrak{h}\rangle\quad(1\leqq i\leqq n)$,

（2）$[e_i,f_j]=\delta_{ij}\alpha_i^\vee\quad(1\leqq i,j\leqq n)$,

（3）$[h,h']=0\quad(h,h'\in\mathfrak{h})$,

（4）$[h,e_i]=\langle\alpha_i,h\rangle e_i\quad(1\leqq i\leqq n)$,

（5）$[h,f_i]=-\langle\alpha_i,h\rangle f_i\quad(1\leqq i\leqq n)$.

さらに

$$\tilde{\mathfrak{g}}_+=\langle e_1,\cdots,e_n\rangle$$
$$\tilde{\mathfrak{g}}_-=\langle f_1,\cdots,f_n\rangle$$

とおく．

定理 次の（a）～（e）が成立する．

（a）$\widetilde{\mathfrak{g}}(A)=\widetilde{\mathfrak{g}}_+\oplus\mathfrak{h}\oplus\widetilde{\mathfrak{g}}_-$（ベクトル空間の直和）．

（b）$\widetilde{\mathfrak{g}}_+$ は $\{e_1,\cdots,e_n\}$ の上の自由リー代数であり，$\widetilde{\mathfrak{g}}_-$ は $\{f_1,\cdots,f_n\}$ の上の自由リー代数である．

（c）写像 $\tau: e_i\to -f_i,\ f_i\to -e_i,\ h\to -h\ (h\in\mathfrak{h})$ は $\widetilde{\mathfrak{g}}(A)$ の自己同型 $\widetilde{\tau}$ に延長される．

（d）$\mathfrak{h}$ に関して，$\widetilde{\mathfrak{g}}(A)$ は次のような，ルート空間への分解を持つ．

$$\widetilde{\mathfrak{g}}(A)=\left(\coprod_{\substack{\alpha\in Q_+\\ \alpha\neq 0}}\widetilde{\mathfrak{g}}_{-\alpha}\right)\oplus\mathfrak{h}\oplus\left(\coprod_{\substack{\alpha\in Q_+\\ \alpha\neq 0}}\widetilde{\mathfrak{g}}_{\alpha}\right)$$

ただし，$Q=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{Z}\alpha_i$, $Q_+=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{Z}_+\alpha_i$, $\widetilde{\mathfrak{g}}_\alpha=\{\alpha\in\widetilde{\mathfrak{g}}(A)\,|\,[h,x]=\alpha(h)x\}$．さらに $\dim\widetilde{\mathfrak{g}}_\alpha<\infty$, $\widetilde{\mathfrak{g}}_\alpha\subset\widetilde{\mathfrak{g}}_+$, $\widetilde{\mathfrak{g}}_{-\alpha}\subset\widetilde{\mathfrak{g}}_-$ $(\alpha\in Q_+,\ \alpha\neq 0)$ が成立する．

（e）$\widetilde{\mathfrak{g}}(A)$ の，$\mathfrak{h}$ と 0 以外に共通部分のない，イデアルの中に最大のもの $\mathfrak{r}$ が存在して次式のようになっている．

$$\mathfrak{r}=(\mathfrak{r}\cap\widetilde{\mathfrak{g}}_+)\oplus(\mathfrak{r}\cap\widetilde{\mathfrak{g}}_-)$$ ▮

定理の中で定義した

$$Q=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{Z}\alpha_i$$

は**ルート格子**と呼ばれ，e_i, f_j は**シュヴァレー生成元**と呼ばれる．$\mathfrak{r}$ を上の定理の（e）で存在の保障された $\widetilde{\mathfrak{g}}(A)$ のイデアルとするとき，

定義 $\mathfrak{g}(A)=\widetilde{\mathfrak{g}}(A)/\mathfrak{r}$ とおく． ▮

この $\mathfrak{g}(A)$ が一般カルタン行列 $A=(a_{ij})$ に付随するキャッツ・ムーディ代数である．$\mathfrak{r}\cap\mathfrak{h}=0$ だから，$\mathfrak{h}$ の $\mathfrak{g}(A)$ での像も $\mathfrak{h}$ で表わす．通常，e_i, f_j の像もそのまま e_i, f_j で表わす．

$$\mathfrak{g}(A)=[\mathfrak{g}(A),\mathfrak{g}(A)]+\mathfrak{h}$$

が成立していて，$\mathfrak{g}(A)=[\mathfrak{g}(A),\mathfrak{g}(A)]$ となるのは $\det A\neq 0$ のときに限る．

$$\mathfrak{g}(A)=\coprod_{\alpha\in Q}\mathfrak{g}_\alpha$$

$\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g}(A) \mid [h,x] = \alpha(h)x\}$ と書けて，$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ となっている．$\dim \mathfrak{g}_\alpha$ は α の**重複度**と呼ばれて，$\mathrm{mult}\,\alpha$ とも書かれる．$\mathrm{mult}\,\alpha \neq 0$ となる $\alpha \in Q$ は $\mathfrak{g}(A)$ の**ルート**と呼ばれる．古典的な単純リー代数では有限個の Q の元だけがルートとなっている．

$\mathfrak{g}(A)$ をキャッツ・ムーディ代数とし，e_i, f_i $(1 \leqq i, j \leqq n)$ をそのシュヴァレー生成元としよう．

$$\mathfrak{g}_i = \mathbb{C}e_i + \mathbb{C}\alpha_i^\vee + \mathbb{C}f_i$$

とおけば，$\mathfrak{g}_i \cong sl_2(\mathbb{C})$ である．次の重要な関係式は（もちろん自明ではないが）証明できる．

$$(\mathrm{ad}\, e_i)^{1-a_{ij}} e_j = 0; \quad (\mathrm{ad}\, f_j)^{1-a_{ij}} f_j = 0, \quad i \neq j.$$

ここで $\mathrm{ad}\, x(y) = [x,y]$ である．ムーディ（1968）が定義したリー代数 $\mathfrak{g}_1(A)$ は，$3n$ 個の生成元 $e_i, f_i, h_i, (i = 1, \cdots, n)$ を持ち，それらの基本関係式は，

$$[h_i, h_j] = 0,\ [e_i, f_i] = h_i;\ i \neq j \text{ のとき},\ [e_i, f_j] = 0$$
$$[h_i, e_j] = a_{ij} e_j,\ [h_i, f_j] = -a_{ij} f_j$$
$$(ad\, e_i)^{1-a_{ij}} e_j = 0,\ (ad\, f_j)^{1-a_{ij}} f_j = 0$$

である．上式の最後の関係式（**セール**（J. P. Serre）**の関係式**と呼ばれる）は，有限次元半単純リー代数では証明できるものである．一般カルタン行列を使うと，なんらかの方策を考えないと証明できない．ムーディはセールの関係式を初めから定義に入れ，キャッツは一般カルタン行列の実現という概念を導入して $\widetilde{\mathfrak{g}}(A)$ 定義し，次に $\mathfrak{h}$ と交わらない最大のイデアル $\mathfrak{r}$ で割ることにより，$\mathfrak{g}(A) = \widetilde{\mathfrak{g}}(A)/\mathfrak{r}$ というリー代数に到達し，それがセールの関係式を満たすことを証明するのである．

次に**一般キャッツ・ムーディ代数**の定義をする．キャッツ・ムーディ代数の定義にも変遷があったが，一般キャッツ・ムーディ代数の定義は，いまだはっきりしない．分母公式を古典的な j 関数で書くことができる一般キャッツ・ムーディ代数の 1 つを，ボーチャズが発見して注目を集めたが，それ以外に数学的に興味のある例は発見されていない．興味ある例が数多く出てくれば，

一般キャッツ・ムーディ代数の定義も，自然に最良のものが，定まってくると思われる．キャッツ・ムーディ代数の場合と同じく，セールの関係式を仮定するのか，それとも証明するのか，外部微分(outer derivation)をどうするか，中心はどのように扱うか，などが問題である．ここでは煩わしいことは避け，細かい点は，今後の研究にまかせる．

$A=(a_{ij})$ を(可算無限次の行列も許す)対称行列としよう．次のことを仮定する．

(1′) $a_{ii}=2$ または，$a_{ii}\leqq 0$，

(2′) $i\neq j$ のとき，$a_{ij}\leqq 0$ で $a_{ii}=2$ ならば，さらに，$a_{ij}\in\mathbb{Z}$，

(3′) $a_{ij}=0$ と $a_{ji}=0$ は同値.

このような A を GKM 型カルタン行列と呼び，今までの一般カルタン行列を KM 型カルタン行列と呼ぼう．行列の大きさが可算無限のものも許されており，また対角成分に 0 または負の数を許している．(1′)，(2′)の a_{ii} に関する部分は，$a_{ii}>0$ のとき $\dfrac{2a_{ij}}{a_{ii}}\in\mathbb{Z}$ とすることもある．(2′)の条件：$a_{ij}\leqq 0$，$a_{ii}=2$ ならば $a_{ij}\in\mathbb{Z}$，は KM 型の場合と同じだが，$a_{ii}\leqq 0$ の場合は，$a_{ij}\leqq 0$ だけで，それ以上のことは要求しない．(3′)は KM 型と同じである．

ここでは A を対称としたから(3′)は明らかである．定義は述べないが A は対称化可能とだけ仮定することもある．

まず，A が有限の大きな行列の場合を考えよう．$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}=\Pi$，$\{\alpha_1^\vee,\cdots,\alpha_n^\vee\}=\Pi^\vee$ をキャッツ・ムーディ代数のときと同じように定義する．さらに，$a_{ii}=2$ のとき α_i を**実単純ルート**と呼び，$a_{ii}\leqq 0$ のとき α_i を**虚単純ルート**と呼ぶ．

α_i が実単純ルートで $i\neq j$ のとき

$$(\mathrm{ad}\, e_i)^{1-a_{ij}}e_j=0,\quad (\mathrm{ad}\, f_i)^{1-a_{ij}}f_j=0,$$

また $a_{ij}=0$ のとき

$$[e_i,e_j]=[f_i,f_j]=0$$

という関係は証明できる．

A を無限行列とすると，上で述べた関係式の証明は厄介になる．初めからそれを仮定してしまう方が簡明である．

仮定　I を有限または可算無限の添数集合とし，$A=(a_{ij})_{i,j\in I}$ は対称行列で上に述べた条件 ($1'$), ($2'$) を満足するとする． ∎

定義（**GKM-I**）　$\widetilde{\mathfrak{g}}'(A)$ は $\{e_i, f_i, h_i\}$, $i\in I$，で生成され，次の基本関係式を持つリー代数とする．

$$[e_i, f_j]=\delta_{ij}h_i, \quad [h_i, h_j]=0, \quad [h_i, e_j]=a_{ij}e_j, \quad [h_i, f_j]=-a_{ij}f_j.$$

$\mathfrak{s}$ を

$$a_{ij}=0 \text{ のとき，} [e_i, e_j], [f_i, f_j]$$
$$a_{ii}=2,\ i\neq j \text{ のとき，} (\mathrm{ad}\, e_i)^{1-a_{ij}}e_j,\ (\mathrm{ad}\, f_i)^{1-a_{ij}}f_j$$

で生成された $\widetilde{\mathfrak{g}}'(A)$ のイデアルとしよう．

$$\mathfrak{g}'(A)=\widetilde{\mathfrak{g}}'(A)/\mathfrak{s}$$

とおいて $\mathfrak{g}'(A)$ を行列 A に付随した一般キャッツ・ムーディ代数と呼ぶ． ∎

注意　一般キャッツ・ムーディ代数にはこの他にも 2，3 の定義がある．初めの $\widetilde{\mathfrak{g}}'(A)$ を $\mathfrak{s}$ で割った剰余リー代数，すなわち $\mathfrak{g}'(A)$ を，さらにその中心（またはその部分空間）で割ることもある．$\mathfrak{g}'$ と $'$ を付けた理由には，深い意味はない．キャッツ[*2)]は「実現」をせずに直接作ったキャッツ・ムーディ代数には $'$ を付けているので，それにならった．

コンウェイ・ノートン予想の証明にボーチャズが導入した一般キャッツ・ムーディ代数 $\mathfrak{g}$ は次のように定義される．

定義（**GKM-II**）

(a) $\mathfrak{g}=\coprod_j \mathfrak{g}_j$ は整数環 $\mathbb{Z}$ で次数の付いたリー代数である．すなわち，$[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j]\subset\mathfrak{g}_{i+j}$ が成立している．各々の $\mathfrak{g}_i$, $i\neq 0$ は有限次元である．

(b) $\mathfrak{g}$ は位数 2 の自己同型 τ を持ち，$\tau(\mathfrak{g}_i)=\mathfrak{g}_{-i}$ が，各 $i\in\mathbb{Z}$ について成立し，$\mathfrak{g}_0$ 上では $\tau=-1$ となっている．特に，$\mathfrak{g}_0$ は可換なリー代数である．

---
*2) あとがきの中の文献 [14]．

(c) $\mathfrak{g}$ は条件 (i)〜(iv) を満たす双 1 次形式 $\langle\ ,\ \rangle$ を持つ.

(i) $\langle [a,b],c\rangle = \langle a,[b,c]\rangle$　(不変形式と呼ばれる).

(ii) $\langle \tau(a),\tau(b)\rangle = \langle a,b\rangle$　(τ 不変).

(iii) $i+j\neq 0$ のとき, $\langle \mathfrak{g}_i,\mathfrak{g}_j\rangle = 0$.

(iv) $0\neq a\in\mathfrak{g}_i$, $i\neq 0$ のとき, $-\langle a,\tau(a)\rangle > 0$. ▮

定理　$\mathfrak{g}$ を上の条件 (a)〜(c) を満足するリー代数をせよ. そのとき対称行列 (可算無限のものも許す) $A=(a_{ij})$ が存在して, $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}'(A)$ は双方をその中心で割れば同型である. ▮

一般論はこのくらいにして, ボーチャズが定義したモンスター・リー代数についての記述に移ろう. ムーンシャイン加群である頂点作用素代数 $V^\natural$ と, 2 次元不定値偶型式 U から作られた頂点代数 V_U のテンソル積である頂点代数 $W=V^\natural\otimes V_U$ についてはこの節の初めにすでに述べた. 一般に,

$$V=\coprod_{n\in\mathbb{Z}} V_n$$

を頂点作用素代数とすると, 公理の (5),(6) が成立していなくても $V_1/L(-1)V_0$ には次のようにしてリー代数の構造が入る. すなわち, $a,b\in V_1$ に対して, リー交換子積を

$$[a,b]\equiv a_0 b \quad \mathrm{mod}\ L(-1)V_0$$

で定義する. 一般式

$$u_n v=(-1)^{n+1}\left(v_n u+\sum_{i\geqq 1}(-1)^i\frac{L(-1)^i}{i!}v_{n+i}u\right)$$

において, $n=0$ とおくと

$$u_0 v=(-1)\left(v_0 u+\sum_{i\geqq 1}(-1)^i\frac{L(-1)^i}{i!}v_i u\right)$$

が成立する. すべての i に対して, $v_i u\in V_{-i+1}$ であるので, $L(-1)^{i-1}v_i u\in V_0$ である. ゆえに,

$$\sum_{i\geqq 1}(-1)^i\frac{L(-1)^i}{i!}v_i u\in L(-1)V_0$$

となる．すなわち，

$$u_0 v \equiv -v u_0 \quad (\mathrm{mod}\ L(-1)V_0)$$

である．これは

$$[a,b] \equiv -[b,a], \quad a,b \in V_1$$

を意味する．

次にヤコビ律を証明しよう．まず，一般式

$$[u_m, v_n] = \sum_{i \geqq 0} \binom{m}{i} (u_i v)_{m+n-i}$$

より

$$[u_0, v_0] = (u_0 v)_0$$

を得る．それを使うと，

$$[a,[b,c]] \equiv [a, b_0 c] \equiv a_0 b_0 c$$

となる．ここで記号 $\equiv$ は，$\mathrm{mod}\, L(-1)V_0$ で考えることを意味する．計算を続けると，

$$\begin{aligned}
&[a,[b,c]] + [b,[c,a]] + [c,[a,b]] \\
&\quad \equiv a_0 b_0 c + b_0 c_0 a + c_0 a_0 b \\
&\quad \equiv a_0 b_0 c + b_0 c_0 a - c_0 b_0 a \\
&\quad \equiv a_0 b_0 c + (b_0 c)_0 a \\
&\quad \equiv a_0 b_0 c - a_0 b_0 c \\
&\quad \equiv 0
\end{aligned}$$

となりヤコビ律も証明された．これを頂点代数 W に適用すれば，

$$W_1 / L(-1) W_0$$

はリー代数となる．しかし，この $W_1/L(-1)W_0$ はまだ我々の求めるものにはなっていない．

$$P=\{w\in W \mid \text{すべての } j>0 \text{ に対して } L(j)w=0\}$$

という W の部分空間 P を定義しよう．$j\neq 0$ のとき，

$$L(j)L(0)w=L(0)L(j)w+jL(j)w$$

となるので P は $L(0)$ で不変である．$L(0)$ が次数作用素 ($w\in W_i$ のとき $L(0)w=iw$) であることから

$$P=\coprod_{i\in\mathbb{Z}} P_i, \quad P_i\subset W_i$$

となっていることもわかる．物理学者は P を物理的状態からなる空間と言っている．我々の目的には P の全空間は必要でなく，その次数 1 の部分空間 P_1 だけを使う．定義から

$$P_1=\{w\in W \mid \text{すべての } j>0 \text{ に対して } L(j)w=0,\ L(0)w=w\}$$

である．さらに，

$$M_1=P_1/L(-1)P_0$$

とおく．頂点作用素代数 $V=\coprod_{n\in\mathbb{Z}} V_n$ が与えられたとき，$V_1/L(-1)V_0$ はリー代数となることは上に述べたが，M_1 にも誘導されたリー代数の構造が入る．それを見るために，$u,v\in P_1$ としよう．$j>0$ のとき，$u_0v\in W_1$, $u_0\omega_{j+1}v=0$ であるが，

$$\begin{aligned}
L(j)u_0v&=\omega_{j+1}u_0v=[\omega_{j+1},u_0]v+u_0\omega_{j+1}v\\
&=[\omega_{j+1},u_0]v=\sum_{i\geqq 0}\binom{j+1}{i}(\omega_i u)_{j+1-i}v\\
&=(j+1)(\omega_1 u)_j v+(\omega_0 u)_{j+1}v\\
&=(j+1)(L(0)u)_j v+(L(-1)u)_{j+1}v\\
&=(j+1)u_j v-(j+1)u_j v\\
&=0
\end{aligned}$$

となるので $u_0v\in P_1$ を得る．さらに，ヴィラソロ代数の関係式により $L(-1)P_0$ は P_1 の部分空間となっていることがわかる．

$$L(-1)P_0 = L(-1)W_0 \cap P_1$$

も証明できるので，$P_1/L(-1)P_0$ にはリー代数 $W_1/L(-1)W_0$ から誘導されたリー代数の構造が入っている．

格子 L から作られた頂点作用素代数 V_L には，自然に双 1 次形式が入る．その性質の重要なものの 1 つに

$$\langle u, L(n)v\rangle = \langle L(-n)u, v\rangle$$

がある．ムーンシャイン加群 $V^\natural$ にも同様な双 1 次形式が入り，$W = V^\natural \otimes V_U$ にはテンソル積形式としての双 1 次形式

$$\langle v_1 \otimes u_1, v_2 \otimes u_2\rangle = \langle v_1, v_2\rangle\langle u_1, u_2\rangle$$

が入る．その双 1 次形式 $\langle\ ,\ \rangle$ を P_1 に制限すれば P_1 の双 1 次形式 $\langle\ ,\ \rangle|_{P_1}$ が誘導される．$v \in P_1, u \in P_0$ のとき，

$$\langle v, L(-1)u\rangle = \langle L(1)v, u\rangle = 0$$

であるので，$L(-1)P_0$ は $\langle\ ,\ \rangle|_{P_1}$ の退化核に入る．ゆえに，$\langle\ ,\ \rangle|_{P_1}$ はリー代数 $M_1 = P_1/L(-1)P_0$ の上の双 1 次形式 $\langle\ ,\ \rangle|_{M_1}$ を誘導する．R_1 を $\langle\ ,\ \rangle|_{M_1}$ の退化核，すなわち，

$$R_1 = \{m \in M_1 \mid (m, n) = 0,\ \forall n \in M_1\}$$

とすれば，R_1 はリー代数 M_1 のイデアルである．それは

$$\langle [s,t], u\rangle = \langle s, [t,u]\rangle$$

が成立しているからである*3)．そこで

$$M = M_1/R_1$$

とおき，M を**モンスターリー代数**と呼ぶ．マシュー群も M，モンスターも $\mathbb{M}$，有限群論には M が多い．モンスターリー代数は，$\mathfrak{g}_{\mathbb{M}}$ とか $\mathfrak{m}$ とでも書くべきだったかもしれない．ここではボーチャズの原論文に従った．

*3) 随伴作用素は本節の初めに述べた．

モンスターリー代数の構造を調べることにより，コンウェイ・ノートンの予想が解決するのである．今のところ M には非退化な不変形式 $\langle\, ,\, \rangle$ が入っていることしか判明されていない．

M は 2 次元格子 U の元によって次数が付けられている．すなわち，

$$M=\coprod_{(m,n)\in U} M_{(m,n)}$$

そのことを見るために頂点代数 $W=V^{\natural}\otimes V_U$ の次数付けを復習してみよう．

$$V^{\natural}=\coprod_{n\geqq 0} V_n$$

はよい．前節でみたように V_U の次数付けは

$$\mathrm{wt}\,(\alpha_1(-n_1)\cdots\alpha_r(-n_r)\otimes e^{\alpha})=n_1+\cdots+n_r+\frac{\langle\alpha,\alpha\rangle}{2}$$

とされている．ゆえに，

$$V_U=\coprod_{i\in\mathbb{Z}}(V_U)_i$$

と書いたとき

$$(V_U)_i=\coprod_{\alpha\in U}(V_U)_i^{\alpha}$$

と書ける．$(V_U)^{\alpha}$ を詳しく書くと，

$$(V_U)^{\alpha}=\coprod_{j\geqq 0}(V_U)^{\alpha,j}$$

となり，各直和成分は

$$(V_U)^{\alpha,j}=\Big\langle \alpha_1(-n_1)\cdots\alpha_r(-n_r)\otimes e^{\alpha}\,|\,n_1+\cdots+n_r=j\Big\rangle_{\mathbb{R}}$$

である．すなわち $\langle\ \rangle$ の中の元で，実数体 $\mathbb{R}$ 上に生成されたベクトル空間である．まとめると，

$$V_U=\coprod_{\alpha\in U,\, j\geqq 0}(V_U)^{\alpha,j}$$

となる．

また，

$$W_1 = \coprod_{i \leqq 1} (V^{\natural}_{1-i} \otimes (V_U)_i)$$

であるから

$$W_1 = \coprod_{\alpha \in U} \left(\coprod_{i \leqq 1} (V^{\natural}_{1-i} \otimes (V_U)^{\alpha}_i) \right)$$

となり，

$$W^{\alpha}_1 = \coprod_{i \leqq 1} (V^{\natural}_{1-i} \otimes (V_U)^{\alpha}_i)$$

とおけば，

$$W_1 = \coprod_{\alpha \in U} W^{\alpha}_1$$

となり，W_1 が U の元によって次数が付けられている．U は 2 次元格子でその付随する行列が，

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

となる基底が存在するので，その基底を使い，今後 U の元は (m,n) のように表わすことにする．内積は，$\alpha=(m,n)$ のとき，

$$\langle \alpha, \alpha \rangle = -2mn$$

である．この記号を使えば，

$$W_1 = \coprod_{(m,n) \in U} W^{(m,n)}_1$$

となり，P_1 にも同様な分解が成立する．$L(-1)$ の定義

$$L(-1) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (L_{V^{\natural}}(i) \otimes L_{V_U}(1-i))$$

から，$L(-1)$ が P_0 の U の次数付けを保つことがわかる．さらに，M_1 の不変形式の退化核にも誘導された U による次数が入っている．結局，モンス

ターリー代数 M に2次元格子 U による次数が入っていることがわかった. すなわち,

$$M = \coprod_{(m,n)\in U} M_{(m,n)}$$

と直和にわかれている.

定理 次のことが成立する.

(a) $M_{(0,0)} \cong \mathbb{R}^2$,

(b) $M_{(m,n)} \cong V^{\natural}_{mn+1}$, $(m,n)\neq(0,0)$, (同型はモンスター加群として), 特に, $(m,n)\neq(0,0)$ ならば, $\dim M_{(m,n)} = c(mn)$ となる. ▮

この定理は次の定理の系として得られる.

定理 次の条件を仮定する.

(a) V は非退化(対称)不変双1次形式 $\langle\ ,\ \rangle$ を持つ頂点作用素代数 ($V = \coprod_{n\in\mathbb{N}} V_n, \dim V_0 = 1$) で, その階数 c は 24 の倍数とする.

(b) V_U はユニモジュラーな2次元偶ローレンツ (H. A. Lorentz) 格子 U から標準的に作られた頂点代数とする.

(c) P_1 を頂点代数 $V\otimes V_U$ の次数1の物理的空間とする.

$$P_1 = \{w\in V\otimes V_U \mid L(j)w=0, \forall j>0, L(0)w=w\}.$$

そのとき, 次のことが成立する.

(i) $P_1 = \coprod_{\alpha\in U} P_1^{\alpha}$ と次数 $\alpha\in U$ の部分空間の直和に書ける.

(ii) $P_1^{\alpha}/P_1^{\alpha}\cap \mathrm{rad}\langle\ ,\ \rangle$ は $\alpha\neq 0$ のとき, $V_{1-\langle\alpha,\alpha\rangle/2}$ に ($V=V^{\natural}$ ならばモンスター加群として) 同型であり, $\alpha=0$ のときは $V_1\oplus R^2$ に同型である. ▮

この定理と $\dim V^{\natural}_{n+1} = c(n) = c_{n+1}$ によって先に定義したモンスターリー代数 $M = \coprod_{\alpha\in U} M_\alpha$ の M_α の次元がすべて定まる. すなわち,

(0) $\dim M_{(0,0)} = 2$,

(1) $\dim M_{(m,n)} = 0$, (m,n のどちらか一方だけが0のとき),

(2) $\dim M_{(m,n)} = 0$, ($mn \leqq -2$ のとき),

(3) $\dim M_{(m,n)} = c(mn)$, (上記以外の (m,n) のとき).

$c(0)=0$ であり, $i\leqq -2$ のとき $c(i)=0$ であるので, 上の (1)～(3) はすべて $\dim M_{(m,n)} = c(mn)$ と書いてもよい. このモンスターリー代数は一般キ

ャッツ・ムーディ代数になっている．そのことを具体的に見てみよう．まず，$\mathfrak{g}'(A)$ を作るための行列 A がいかなるものかを見よう．A は可算無限次の‘正方’行列となる．まず，添数の集合 I を

$$I=\{(1,n,a)\,|\,n=-1,\ \text{または}, n\geqq 1,\ \ 1\leqq a\leqq c(n)\}$$

で定義する．第 1 番目の数は常に 1 でその意味では不必要なのであるが，

$$(1,n,a)=((1,n),a)$$

のように解釈し，$(1,n)\in U$ を意味している．U の元 $(1,n)$ に対して $c(n)$ 個の足（= 自由度）を付けた添数集合を考えているのである．

$$H=\mathbb{R}u_1\oplus\mathbb{R}u_2=\mathbb{R}\otimes_{\mathbb{Z}}U$$

とおく．U は $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ をその付随する行列として持っている 2 次元格子であった．I の元 $i=(1,n,a)$ に対して元（記号）

$$h_i=h^a_{(1,n)}$$

を用意する．

$$\langle h^a_{(1,m)}\,|\,h^b_{(1,n)}\rangle=\langle(1,m),(1,n)\rangle=-m-n$$

と定義する．このとき $I\times I$ の行列

$$A=\Big(\langle h^a_{(1,m)}\,|h^b_{(1,n)}\rangle\Big)$$

が $\mathfrak{g}'(A)$ を構成するために必要な行列 A となる．

$$i=(1,n,a)\in I$$

に対して

$$e_i=e^a_{(1,n)},\quad f_i=f^a_{(1,n)}$$

なる元を用意する．元 $\{h_i,e_i,f_i\}_{i\in I}$ で生成されたリー代数 $\mathfrak{g}'(A)$ で次の生成関係を持つものを考える．

（1）$[h_i, h_j]=0,$

（2）$[h_i, e_j]=\langle h_i\,|\,h_j\rangle e_j,$

（3）$[h_i, f_j]=-\langle h_i\,|\,h_j\rangle f_j,$

（4）$[e_i, f_j]=\delta_{ij}h_i,$

（5）$\langle h_i\,|\,h_i\rangle>0$ のとき，$A_{ij}=\dfrac{2\langle h_i\,|\,h_j\rangle}{\langle h_i\,|\,h_i\rangle}$ とおくと，

$$(\mathrm{ad}\,e_i)^{1-A_{ij}}e_j=(\mathrm{ad}\,f_i)^{1-A_{ij}}(f_j)=0,$$

（6）$\langle h_i\,|\,h_j\rangle=0$ のとき，$[e_i, e_j]=[f_i, f_j]=0.$

$\langle h^a_{(1,n)}\,|\,h^a_{(1,n)}\rangle=-2n$ であったので $\langle h_i\,|\,h_i\rangle>0$ となるのは $n=-1$ のときに限る．よって，（5）が実際に適用されるのは

$$e_i=e^1_{(1,-1)},\quad f_i=f^1_{(1,-1)}$$

の場合だけである．なお，$c(-1)=1$ である．

$$\langle(1,-1)\,|\,(1,n)\rangle=-n+1$$

であるから，$j=(1,n,a)$ の場合は

$$A_{ij}=\frac{2\langle h_i\,|\,h_j\rangle}{2}=-n+1$$

となり

$$(\mathrm{ad}\,e^1_{(1,-1)})^n e^a_{1,n}=0=(\mathrm{ad}\,f^1_{(1,-1)})^n f^a_{1,n},\quad 1\leqq a\leqq c(n)$$

が，（5）の具体的な生成関係式である．

次に $\mathfrak{g}'(A)$ のルート空間を定義しよう．

$$\begin{cases}\deg e^a_{(1,n)}=(1,n)\in U\\ \deg f^a_{(1,n)}=-(1,n)\in U\\ \deg h^a_{(1,n)}=0\end{cases}$$

とおく．これにより，$\mathfrak{g}'(A)$ は U で次数の付けられたリー代数となっている．そこで $\mathfrak{g}'(A)$ のルート格子 Q を

$$Q=\coprod_{(m,n)\in U}\mathbb{Z}(m,n)$$

として定義する．さらに

$$\Delta^+ = \{(m,n) \mid c(mn) \neq 0,\ m > 0\}$$
$$\Delta^- = -\Delta^+$$

と定義し，Δ^+ を正のルート，Δ^- を負のルートと呼ぶ．$\alpha = (m,n) \in \Delta^+ \cup \Delta^-$ のとき，

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g}'(A) \mid \deg x = \alpha\}$$

とおけば，$\dim \mathfrak{g}_\alpha = c(mn)$ であり，

$$\mathfrak{g}'(A) = \left(\bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha \right) \oplus \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Delta^-} \mathfrak{g}_\alpha \right)$$

となっている．$\mathfrak{g}'(A)$ の単純ルートは

$$\{(1,-1),\ (1,n),\ n \geqq 1\} \subset U$$

である．そのうち，$(1,-1)$ は，$\langle (1,-1), (1,-1) \rangle = 2$ であり実単純ルートと呼ばれ，その他の $(1,n)$ は自分自身との内積が負であり虚単純ルートと呼ばれる．$\mathfrak{g}'(A)$ の**ワイル**（H. Weyl）**群** W は実の単純ルートによる反転から生成される $\mathrm{End}(Q)$ の部分群であるが，我々の場合には，ただ 1 つの実の単純ルートしかないので，$W \cong Z_2$ で W は $(1,-1)$ による反転

$$\tau_0 : \beta \to \beta - \langle \alpha, \beta \rangle \alpha$$

から生成される．$\beta = (m,n)$ とすると

$$\tau_0(\beta) = (n,m)$$

である．

さて，ボーチャズが構成したモンスターリー代数 M と我々が今構成した $\mathfrak{g}'(A)$ との関係を考えてみよう．

モンスターリー代数 M ではそのカルタン部分代数は $M_{(0,0)}$ で 2 次元である．それを $H = \mathbb{R}u_1 \oplus \mathbb{R}u_2$ と同一視する．$\mathfrak{g}'(A)$ のカルタン部分代数 $\mathfrak{h}$ は集合 $\{h^a_{(1,n)} \mid n = -1, 1, 2, \cdots, \ldots : 1 \leqq a \leqq c(n)\}$ を基底としているのでもちろん無限次元である．しかし，$\mathfrak{h}$ のほとんど部分は $\mathfrak{g}'(A)$ の中心 $\mathfrak{z}$ に入ってしまう．

$h^a_{(1,m)}-h^b_{(1,m)}$ が中心に入るのは明らかであろう．ゆえに，リー交換子による作用としては，$1\leqq a\leqq c(n)$ は考えなくてよい．$\overline{h}_{(1,m)}=h^a_{(1,m)} \pmod{\mathfrak{z}}$ とおこう．一方，$\overline{h}_{(1,m)}$ の作用と $\dfrac{1-m}{2}\overline{h}_{(1,-1)}+\dfrac{1+m}{2}\overline{h}_{(1,1)}$ の作用はまったく同じである．ゆえに，$\mathfrak{g}'(A)/\mathfrak{h}\cap\mathfrak{z}$ のカルタン部分代数は $\overline{h}_{(1,-1)},\overline{h}_{(1,1)}$ で張られる 2 次元の空間で，モンスターリー代数の重さ 0 に当たる空間の $M_{(0,0)}\cong\mathbb{R}^2$ と同じものとみてよい．モンスターリー代数 M と $\mathfrak{g}'(A)/\mathfrak{h}\cap\mathfrak{z}$ を同型にするには骨が折れる仕事である．$\mathfrak{g}'(A)$ の基本関係式がモンスターリー代数 M の基本関係式でもあることを示さなければならない．

$\mathfrak{g}$ を対称化可能なキャッツ・ムーディ代数とするとき，次の**ワイル・キャッツの公式**が知られている．

$$\prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-e^{-\alpha})^{\dim\mathfrak{g}_\alpha}=\sum_{w\in W}\epsilon(w)e^{w(\rho)-\rho}$$

$e^{-\alpha}$ などは記号で $e^{-\alpha}e^{-\beta}=e^{-\alpha-\beta}$ のように累乗関数としてふるまう．Δ^+ は正のルート全体からなる集合であり，W は $\mathfrak{g}$ のワイル群である．ワイル群 W の元 w に対して $\epsilon(w)=(-1)^{l(w)}$ とおき，$l(w)$ は W の基本鏡映元（すなわち，単純ルートによる反転）の積で w を書いたときの最小の長さである．ρ は $\mathfrak{g}$ のカルタン部分代数 $\mathfrak{h}$ の双対（dual）空間 $\mathfrak{h}^*$ の元で

$$\rho(\alpha)=\langle\rho\,|\,\alpha_i\rangle=\frac{1}{2}\langle\alpha_i\,|\,\alpha_i\rangle$$

がすべての単純ルート α_i について成立しているものである．ワイル・キャッツの公式は（無限）積と（無限）和を結び付ける関係式であり，キャッツ・ムーディ代数としていろいろ異なったものをとることにより，古くから知られている関係式や，新しい公式などが得られている．

上で述べたワイル・キャッツの公式は**分母公式**とも言われているが，$\mathfrak{g}$ を対称化可能なキャッツ・ムーディ代数とすると，もう少し一般的に指標公式が

$$\operatorname{ch}L(\Lambda)=\frac{\displaystyle\sum_{w\in W}\epsilon(w)e^{w(\Lambda+\rho)-\rho}}{\displaystyle\prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-e^{-\alpha})^{\dim\mathfrak{g}_\alpha}}$$

という分母のある形でも述べられる．ここで $L(\Lambda)$ は Λ を最高ウエイトとする $\mathfrak{g}$ の既約加群であり，

$$L(\Lambda) = \oplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} L(\Lambda)_\lambda$$

を $L(\Lambda)$ のウエイト空間への分解とするとき,

$$\mathrm{ch}\, L(\Lambda) = \sum_{\lambda \in \Lambda} (\dim V_\lambda) e^\lambda$$

と定義される．上式は,

$$\mathrm{ch}\, L(\Lambda) \prod_{\alpha \in \Delta^+} (1 - e^{-\alpha})^{\dim \mathfrak{g}_\alpha} = \sum_{w \in W} \epsilon(w) e^{w(\Lambda + \rho) - \rho}$$

とも書ける．指標公式の左辺は最高ウエイト Λ から，それより小さいウエイト $\Lambda - \alpha$ が次々に現われる様子が書かれている．e^α でなく，$e^{-\alpha}, \alpha \in \Lambda^+$ が使われる理由である．そこで $\Lambda = 0$ とおけば，分母公式が得られる．

ボーチャズは一般キャッツ・ムーディ代数を定義したのみならず，その分母公式をも証明した．それは次のように述べられる．

$$e^\rho \prod_{\alpha \in \Delta^+} (1 - e^\alpha)^{\dim \mathfrak{g}_\alpha} = \sum_{w \in W} \epsilon(w) w(S) \tag{BI}$$

ここで，$p = e^{(1,0)}, q = e^{(0,1)}$ という記号を導入して，モンスターリー代数 M の場合に適用すれば，(BI) は

$$p^{-1} \prod_{m > 0,\, n \in \mathbb{Z}} (1 - p^m q^n)^{c(mn)} = J(p) - J(q) \tag{BII}$$

と同値になる．ここでは $J(z)$ を $J(q)$ と書いた．$q = e^{2\pi i z}$．ボーチャズの公式では，無限積は,

$$\prod_{\alpha \in \Delta^+} (1 - e^\alpha)$$

となっており,

$$\prod_{\alpha \in \Delta^+} (1 - e^{-\alpha})$$

ではない．一般キャッツ・ムーディ代数に対しても，ch$L(\Lambda)$ が入っている形のワイル・キャッツ指標公式がボーチャズによって得られている．

ボーチャズの公式 (BI) のうち，今までに説明されていないものの説明に入ろう．$\epsilon(w) = \det(w) = (-1)^{l(w)}$ は問題ないであろう．$S = e^\rho \sum_s \epsilon(s) e^s$ で s は

互いに直交している虚の単純ルートの和全体の集合の上を走る．s が m 個のそのような虚の単純ルートの和であるとき，$\epsilon(s)=(-1)^m$ である．また，$m=0$ の自明の場合も $\sum$ に含める．

一般キャッツ・ムーディ代数の分母公式をモンスターリー代数 M に応用してその結果を見よう．M は2次元ローレンツ格子 U で次数が付けられていた．

$$M=\coprod_{(m,n)\in U} M_{(m,n)}$$

M のルート系の必要な情報は次のものである．

（1）各ルート $\alpha\in Q$ は重複度を除いて U の元と同一視でき，$\alpha=(m,n)\in U$ と書ける．

（2）$\alpha=(1,-1)$, $\alpha=(1,n)$, $n>0$ と書けるものだけが単純ルートである．

（3）$\alpha=(1,-1)$ が唯一の実のルートであり，その重複度は $1=c(-1)$ である．それゆえ，M のワイル群 W は，ただ1つの実単純ルート $\alpha=(1,-1)$ から定義される鏡映：

$$\tau_0:\beta\to\beta-\langle\beta,\alpha\rangle\alpha$$

から生成される位数2の群である．

（4）$J(q)=\sum c(n)q^n$ とするとき，ルート $(m,n)\in U$ の重複度は $c(mn)$ である．すなわち，$\dim M_{(m,n)}=c(mn)$ である．

（5）$\rho=(-1,0)$（ゆえに，$\langle\rho|\alpha\rangle=-\dfrac{1}{2}\langle\alpha|\alpha\rangle$ がすべての単純ルートについて成立している．キャッツ・ムーディ代数では，ρ は $\langle\rho|\alpha\rangle=\dfrac{1}{2}\langle\alpha|\alpha\rangle$ を成立させる，相対空間 $\mathfrak{h}^*$ の元として定義される．）

まず，分母公式（BII）の左辺

$$p^{-1}\prod_{m>0,\, n\in\mathbb{Z}}(1-p^m q^n)^{c(mn)}$$

を得よう．正のルートの集合 Δ^+ は

$$\begin{aligned}\Delta^+ &= \{(1,-1),(m,n),m>0,n>0\}\\ &= \{(m,n),m>0,n\in\mathbb{Z},c(mn)\neq 0\}\end{aligned}$$

である．$p=e^{(1,0)}$, $q=e^{(0,1)}$ という記号を導入すれば，

$$\begin{aligned} e^{\rho} &= p^{-1} \\ e^{(m,n)} &= p^m q^n \\ \dim M_{(m,n)} &= c(mn) \end{aligned}$$

であるから（BII）の左辺がただちに得られる．次に右辺を得よう．$(1,-1)$ がモンスターリー代数のただ1つの正の実ルートである．よって，$\alpha=(m,n)$, $m>0$, $n>0$ はすべて正の虚ルートである．U の内積は

$$(m,n)(m',n') = -mn' - m'n$$

で与えられているから，2つの正の虚ルートが直交することはない．ゆえに，$(m,n)=(0,0)$ の場合も和に加え，正の虚単純ルート $(1,n)$ に対しては，

$$\epsilon((1,n)) = -1$$

であり，その重複度は $c(1\cdot n)=c(n)$ だから

$$\begin{aligned} S &= p^{-1}\{1+(-1)\sum_{n\geqq 1} c(n)e^{(1,n)}\} = p^{-1}\{1-p\sum_{n\geqq 1} c(n)q^n\} \\ &= p^{-1}+q^{-1}-J(q) \end{aligned}$$

一方，$W=\langle\tau_0\rangle=\langle w\rangle$ のとき，

$$\tau_0 : (m,n) \to (n,m)$$

だから，

$$w(S) = q^{-1}+p^{-1}-J(p)$$

となり，ボーチャズの分母公式の右辺は

$$S - w(S) = J(p) - J(q)$$

となり，求める式（BII）が得られた．

これで（BI）から（BII）が導かれることがわかった．そのために，モンスターリー代数の単純ルートがすでに判明している（すなわち，$\mathfrak{g}'(A)/\mathfrak{h}\cap\mathfrak{z}\cong M$）として議論を進めてきたが，実はそれは問題なのである．ボーチャズの原論文で

は，保型関数論を使い，（BII）をまず初めに証明する．そして，それをつかってモンスターリー代数 M の単純ルートを決めるのである．歴史的順序を重んずる意味で以下，モンスターリー代数 M の分母公式となるべき公式

$$p^{-1}\prod_{m>0,\, n\in\mathbb{Z}}(1-p^{mn})^{c(mn)}=J(p)-J(q) \qquad \text{(BII)}$$

を保型関数論を使って証明しよう．

等式

$$\log(1-x)=-\sum_{k>0}\frac{x^k}{k}$$

を使うと，

$$\begin{aligned}\log\prod_{\substack{m>0\\ n\in\mathbb{Z}}}(1-p^mq^n)^{c(mn)}&=\sum_m\sum_n c(mn)\log(1-p^mq^n)\\&=-\sum_m\sum_n\sum_{k>0}\frac{1}{k}c(mn)p^{mk}q^{nk}\\&=-\sum_{m'>0}\left(\sum_{n'\in\mathbb{Z}}\sum_{\substack{k>0\\ k\mid(m',n')}}\frac{1}{k}c\left(\frac{m'n'}{k^2}\right)q^{n'}\right)p^{m'}\end{aligned}$$

と書ける（$m'=mk$, $nk=n'$ とおいた）．$n\in\mathbb{N}$ に対して，ヘッケ（E. Hecke）の作用素 T_m を

$$T_m: f(q)=\sum a(n)q^n\longrightarrow\sum b(n)q^n$$
$$b(n)=\sum_{\substack{a>0\\ a\mid(m,n)}}a^{-1}c\left(\frac{mn}{a^2}\right)$$

で導入すると，上式はさらに

$$\begin{aligned}\log\prod_{\substack{m>0\\ n\in\mathbb{Z}}}(1-p^mq^n)^{c(mn)}&=-\sum_{m'}T_{m'}(\sum_{n'\in\mathbb{Z}}c(n')q^{n'})p^{m'}\\&=-\sum_{m'}T_{m'}(J(q))p^{m'}\\&=\sum_{m>0}f_m(q)p^m\end{aligned}$$

となる．ここで，$f_m(q)$ は $J(q)$ の有理関数である．ゆえに，

$$p^{-1}\exp\left(\sum_m f_m(q)p^m\right)=\sum g_m(q)p^m=p^{-1}\prod_{\substack{m>0\\ n\in\mathbb{Z}}}(1-p^mq^n)^{c(mn)}$$
$$=p^{-1}(1-pq^{-1})\prod_{m,n>0}(1-p^mq^n)^{c(mn)}$$
$$=\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\prod_{m,n>0}(1-p^mq^n)^{c(mn)}$$

が得られる.

$m>0, m=-1, m=0$ のそれぞれの場合に対応して $g_m(q)=c(m), g_{-1}(q)=1, g_0(q)=-J(q)$ と計算できるから

$$\sum g_m(q)p^m=\frac{1}{p}-J(q)+\sum_{m>0}c(m)p^m=J(p)-J(q)$$

が最終的に得られて式(BII)の保型関数論による証明が完了する.

式(BII)をまず証明してから集合 $\{(1,-1),(1,n),n>0\}\subset U$ がモンスターリー代数の単純ルートであることを示すのがボーチャズの採用した方法である.(BI)は一般の一般キャッツ・ムーディ代数で成立しており,(BII)は一般キャッツ・ムーディ代数の知識なしに証明できているのだから,その 2 つの式を比べると,モンスターリー代数 M の単純ルートが決まってしまうのである.

ボーチャズはモンスターリー代数を使って,コンウェイ・ノートンの構成した 171 個のモデュラー関数 $J_g(q)$ が,実際にムーンシャイン加群 $V^\natural$ の M の各元 g に関するトレースに等しいことを証明した.すなわち,

$$J_g(q)=\sum_{n\geqq 0}\mathrm{Tr}\,(g|_{V_n})q^{n-1}$$

である.

ボーチャズは無限個の n に対して,$\mathrm{Tr}\,(g|_{V_n})$ を実際に計算したわけではない.最初の数個の n に対する $\mathrm{Tr}\,(g|_{V_n})$ がすべての $g\in M$ について決まれば,その他の n についても $\mathrm{Tr}\,(g|_{V_n})$ が決まってしまうことを示したのである.

コンウェイ・ノートンが適当なモンスター加群 V_n の無限和 $\coprod_{n\geqq 0}V_n$ に対して上式が成立するだろうと予想して提出した 171 個のモデュラー関数が,再生公式を満たし,$n=2,3,4,6$ のときの $J_g(q)$ の係数がすべての $g\in\mathbb{M}$ に対してわかれば他の n に対しての $J_g(q)$ の係数がすべて決まってしまうというこ

とは，すでに確かめられていた．ボーチャズは上式の右辺，すなわちムーンシャイン加群のトレースから作られる関数も同じ再生公式を満たし，初めの数個の n に対する $\mathrm{Tr}(g|_{V_n})$ が $J_g(q)$ から決まるものに等しいことを証明した．これによって，10 年の間未解決であったコンウェイ・ノートン予想が肯定的に解決したのである．以下，その証明過程を述べよう．

M を今までと同じモンスターリー代数とする．M はいわゆる三角分割を持つリー代数であり，

$$M = M^+ \oplus M^0 \oplus M^-$$

と書ける．意味は明らかであろうが，

$$\begin{aligned} &M^+ = \coprod_{\substack{m>0 \\ n\in\mathbb{Z}}} M_{(m,n)}, \quad \dim M_{(m,n)} = c(mn), \\ &M^0 \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} = \mathbb{R} \otimes U, \\ &M^- = \coprod_{\substack{m>0 \\ n\in\mathbb{Z}}} M_{-(m,n)}, \quad \dim M_{-(m,n)} = c(mn) \end{aligned}$$

である．M^+ の上の外積空間 $\Lambda^i(M^+), i=0,1,2,\cdots$ を作る．特に，

$$\Lambda^0(M^+) = \mathbb{R}, \quad \Lambda^1(M^+) = M^+.$$

ベクトル空間 V の次元が n で有限ならば，$\Lambda^k(V)=0$, $k \geqq n+1$ であるが，$\dim M^+ = \infty$ なので，すべての $i \geqq 0$ について $\Lambda^i(M^+) \neq 0$ である．M^+ は U の元で次数が付けられている．それゆえ，外積空間 $\Lambda^i(M^+)$ にも誘導された次数が入っている．

標準的なホモロジー系列

$$\cdots \to \Lambda^i(M^+) \to \Lambda^{i-1}(M^+) \to \cdots \to \Lambda^0(M^+) \to 0$$

を作る．（ホモロジー系列であるから，添数は下付きであるのが正しいが外積空間はすでに上の添数付けができている．）境界作用素 ∂ は

$$\partial(e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_k) = \sum (-1)^{i+j} [e_i, e_j] \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{e}_i \wedge \cdots \wedge \widehat{e}_j \wedge \cdots \wedge e_k$$

と定義される．$\widehat{e_i}$ などの記号は e_i などを取り除くことを示す．これにより，ホモロジー群

$$H_i(M^+) = Z(\Lambda^i(M^+))/B(\Lambda^i(M^+))$$

が作れる．

このようにして2つの一般加群（virtual module）

$$\Lambda(M^+) = \sum_{i\geqq 0}(-1)^i \Lambda^i(M^+)$$
$$H(M^+) = \sum_{i\geqq 0}(-1)^i H_i(M^+)$$

が作れる．オイラー・ポアンカレの定理により，

$$\Lambda(M^+) \cong H(M^+)$$

である．両辺を別々に計算することにより一般的な再生公式が得られる．

最初に（i 次の）ホモロジー群 $H_i(M^+)$ の基底を考えよう．キャッツ・ムーディ代数に関してはガーランド・レパウスキー（H. Garland - J. Lepowsky）[*4)]の結果がある．しかし，ガーランド・レパウスキーの定理をそのまま述べるのは長くなるので我々の場合に応用してみると次のようになる．

i 次元ホモロジー群 $H_i(M^+)$ は $\Lambda^i(M^+)$ の部分空間 B_i に同型で，

$$B_i = \oplus_\lambda M(\lambda)$$

と書けている．ここで λ は $M^0 = \mathfrak{h}$ のルート空間 U の元で，$\langle\lambda+\rho|\lambda+\rho\rangle = \langle\rho|\rho\rangle$ となっているものを重複度を含めて動き，$M(\lambda)$ は $\mathfrak{h}$ の既約加群で最高ウエイトが λ となっているものである．$\mathfrak{h}$ は可換リー代数だから $M(\lambda)$ は1次元である．ガーランド・レパウスキーの定理は一般キャッツ・ムーディ代数に拡張しておかなければならない．

ガーランド・レパウスキーの定理（の拡張）を我々の場合に適用すると

$$\dim B_j = \sum c(mn)$$

*4) Garland, H., Lepowsky, Lie algebra homology and Macdonald–Kac formula, *Invent. Math.* **34** (1976), 37-76.

で和は

$$\langle (m-1,n) \mid (m-1,n) \rangle = \langle (-1,0) \mid (-1,0) \rangle$$

となる $(m,n) \in U, m>0$ の上をわたる．上式は，

$$m=1 \quad \text{または}, n=0$$

を意味する．$m=1$ ならば，(m,n) は単純ルートである．$n=0$ の場合を考えよう．$\Lambda^1(M^+) \cong M^+$ であり，$(m,0)$ はルートでないから考える必要はない．

$\Lambda^2(M^+)$ の元に対しては次数 $(m,0)$ の元はあり得る．例えば

$$e^{(1,-1)} \wedge e^{(1,1)}$$

の次数は $(2,0)$ である．そのような $\Lambda^2(M^+)$ の元をすべて探そう．単純ルート $(1,-1)$ は，第 2 座標が負となる唯一のルートなので，

$$(m,0) = (m-1,1) + (1,-1)$$

と $(m,0)$ は 2 つのルートに分けられる場合しかない．ルート $(m-1,1)$ の重複度は $c(m-1)$ なので $H_2(M^+)$ の構造も決まった．

次に，$i \geqq 3$ のとき，$H_i(M^+)=0$ であることを示そう．それには，正ルートの 3 個以上の和が $(1,n)$ または,$(m,0)$ とならないことを見ればよいのだが，もちろん $(1,n)$ は不可能である．$(m,0)$ となるためには，$(1,-1)$ を 2 回以上使わねばならず，外積代数の中ではそのような元は 0 である．

以上の結果をまとめると次のようになる．

$$\begin{cases} \operatorname{ch} H_0(M^+) = 1, \\ \operatorname{ch} H_1(M^+) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c(n) e^{(1,n)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c(n) p q^n = pJ(q), \\ \operatorname{ch} H_2(M^+) = \sum_{m \geqq 1} c(m-1) e^{(m,0)} = \sum_{m \geqq 1} c(m-1) p^m = \sum_{m \geqq 0} c(m) p^{m+1} \\ \qquad\qquad\quad = p\left(J(p) - \dfrac{1}{p}\right) = pJ(p) - 1, \\ \operatorname{ch} H_i(M^+) = 0, \quad (i \geqq 3). \end{cases}$$

$\operatorname{ch} H_0(M^+)$ 等は

$$\operatorname{ch} L(\Lambda)=\sum_{\lambda\in\Lambda}(\dim V_\lambda)e^\lambda$$

と同じもので指標形式とも呼ばれる．V_i 等のモンスター加群を，$M_{(m,n)}\cong V^\natural_{mn+1}$ に注意して，$M_{(m,n)}=V^\natural_{mn+1}p^mq^n$ と書き，それを $H_0(M^+), H_1(M^+), H_2(M^+)$ に挿入すると（$V^\natural$ は V と略記する）

$$\begin{cases} H_0(M^+)=\mathbb{R} \\ H_1(M^+)=p\sum_{m\geqq -1}V_{m+1}q^m \\ H_2(M^+)=p\sum_{m\geqq 1}V_{m+1}p^m, \quad (V_1=0) \\ H_i(M^+)=0, \quad (i\geqq 3) \end{cases}$$

であるから，$H(M)$ は次数の付いた一般（virtual）モンスター加群として

$$H(M^+)=p\left(\sum_{m\geqq -1}V_{m+1}p^m-\sum_{n\geqq -1}V_{n+1}q^n\right)$$

となる．

次に，$\Lambda(M^+)$ を計算しよう．2.4 で述べたが，任意の自然数 i に対してアダムズ作用素 ϕ_i は

$$\operatorname{Tr}(g|_{\phi_i(A)})=\operatorname{Tr}(g^i|_A)$$

で定義されている．すなわち，$\phi_i(A)$ は，モンスター $\mathbb{M}$ の作用する一般加群で $\mathbb{M}$ の各元 g についてのトレースをとれば上の式のようになっている．そのような一般加群 $\phi_i(A)$ は実際存在することは第 2 章で示した．A が 1 次元の場合を考えてみると，$\phi_i(A)=A\otimes A\otimes\cdots\otimes A$ でよい．この例からわかるように，ϕ_i は次数 (m,n) の一般加群を次数 (mi,ni) の一般加群に移す．X を 1 次元表現として次の恒等式を考えよう．

$$\exp(-\sum X^i/i)=\exp(\log(1-X))=1-X$$

$g\in\mathbb{M}$ が X に作用しているとすると，

$$\exp\left(-\sum\frac{\operatorname{Tr}(g^i|_X)}{i}\right)=1-\operatorname{Tr}(g|_X)$$

が得られる．A をモンスター加群として $g \in \mathbb{M}$ を固定しよう．g で生成された巡回群 $\langle g \rangle$ の加群として A を 1 次元空間の和に分けて，

$$A = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_r$$

と書こう．$\mathrm{Tr}(g|_A) = \mathrm{Tr}(g|_{A_1}) + \cdots + \mathrm{Tr}(g|_{A_r})$ であり，

$$\prod_{k=1}^{r} \exp\left(-\sum_i \frac{\mathrm{Tr}(g^i|_{A_k})}{i}\right) = \prod_{k=1}^{r} (1 - \mathrm{Tr}(g|_{A_k})).$$

$\langle g \rangle$ 加群の言葉になおすと，

$$\exp\left(-\sum_i \frac{\phi_i(A)}{i}\right) = \Lambda(A)$$

が得られる．$\dim A = 1$ のときは，$\Lambda(A) = 1 - A$ となり，A, B が任意の加群のとき，$\Lambda(A \oplus B) \cong \Lambda(A) \otimes \Lambda(B)$ が成立することに注意すればよい．この等式がすべての $g \in \mathbb{M}$ に成立しているのだから，上式は $\mathbb{M}$ 加群としての等式となる．

$$M^+ = \sum_{\substack{m>0 \\ n \in \mathbb{Z}}} V_{mn+1} p^m q^n$$

であるから

$$\Lambda\left(\sum_{\substack{m>0 \\ n \in \mathbb{Z}}} V_{mn+1} p^m q^n\right) = \exp\left(-\sum_{m,n,i} \frac{\phi_i(V_{mn+1} p^m q^n)}{i}\right)$$

が成立する．$\Lambda(M^+) \cong H(M^+)$ により再びトレースの言葉ですべてを書けば（p を左辺に移して）

$$\begin{aligned} p^{-1} \exp\left(-\sum_{m,n,i} \frac{\mathrm{Tr}(g^i|_{V_{mn+1}}) p^{mi} q^{ni}}{i}\right) \\ = \sum \mathrm{Tr}(g|_{V_{m+1}}) p^m - \sum \mathrm{Tr}(g|_{V_{n+1}}) q^n \end{aligned}$$

が成り立つ．

この式より，モンスター加群の集合 $\{V_n\}_{n=0}^{\infty}$ の間に種々の自明でない関係式が存在することが見てとれよう．知られていた再生公式もこの式から得られる．そこで

$$J_g(z) = \sum_{n \geqq 0} (\mathrm{Tr}\,(g)|_{V_n}) q^{n-1} = \sum_{n \geqq 0} c_g(n-1) q^{n-1},$$

すなわち，$c_g(n) = \mathrm{Tr}\,(g|_{V_{n+1}})$ と定義する．上で得られた式から，ボーチャズは，

$$\begin{aligned}
c_g(4k) &= c_g(2k+1) + (c_g(k)^2 - c_{g^2}(k))/2 + \sum_{1 \leqq j < k} c_g(j) c_g(2k-j), \\
c_g(4k+1) &= c_g(2k+3) - c_g(2) c_g(2k) + (c_g(2k)^2 + c_{g^2}(2k))/2 \\
&\quad + (c_g(k+1)^2 - c_{g^2}(k+1))/2 + \sum_{1 \leqq j \leqq k} c_g(j) c_g(2k-j+2) \\
&\quad + \sum_{1 \leqq j \leqq k} c_{g^2}(j) c_g(4k-4j) + \sum_{1 \leqq j < 2k} (-1)^j c_g(j) c_g(4k-j), \\
c_g(4k+2) &= c_g(2k+2) + \sum_{1 \leqq j \leqq k} c_g(j) c_g(2k-j+1), \\
c_g(4k+3) &= c_g(2k+4) - c_g(2) c_g(2k+1) - (c_g(2k+1)^2 - c_{g^2}(2k+1))/2 \\
&\quad + \sum_{1 \leqq j \leqq k+1} c_g(j) c_g(2k-j+3) + \sum_{1 \leqq j \leqq k} c_{g^2}(j) c_g(4k-4j+2) \\
&\quad + \sum_{1 \leqq j \leqq 2k} (-1)^j c_g(j) c_g(4k-j+2)
\end{aligned}$$

という 4 個の式を得て，任意の n と任意の g に対する $c_g(n)$ の値は，$n = 1,2,3,5$ とすべての j に対しての $c_{g^i}(n)$ により決定されることを示した．言い換えれば，$\mathrm{Tr}\,(g|_{V_2})$，$\mathrm{Tr}\,(g|_{V_3})$，$\mathrm{Tr}\,(g|_{V_4})$ と，$\mathrm{Tr}\,(g|_{V_6})$ がすべての $g \in \mathbb{M}$ について判明していれば，$\mathrm{Tr}\,(g|_{V_n})$ はすべての $g \in \mathbb{M}$ とすべての $n \in \mathbb{Z}$ について決定されることになる．

「モンスター加群 V_2, V_3, V_4 と V_6 の指標がコンウェイ・ノートンの予想したものに等しい」と言うためには，V_2, V_3, V_4, V_6 のモンスターの既約加群への分解が，コンウェイ・ノートン予想したものに等しいことを見ればよい．$\{\varphi_i\}_{i=0}^{193}$ をモンスター $\mathbb{M}$ の既約指標全部からなる集合とし，V_i から定まる $\mathbb{M}$ の指標を χ_i とし，

$$\chi_h = \sum_{k=0}^{193} c_{hk} \varphi_k$$

とおこう．V_2, V_3, V_4, V_6 の次数は大きさが限られているから，$h = 2,3,4,6$ に対しては，

$$V_h = \sum_{k=0}^{6} c_{hk} \varphi_k$$

と書けることがわかる．係数の集合 $\{c_{hk}\}_{h=2,3,4,6;1\leqq k\leqq 7}$ が一意に定まることを言うには，$\mathbb{M}$ の元 $g_0, g_1, \cdots, g_6$ を適当に選び，行列式

$$\det\left(\varphi_i(g_j)\right)_{0\leqq i,j\leqq 6}$$

が 0 とならないようにできればよい．そのような元 $g_0, g_1, \cdots, g_6$ を見つけることができるので証明は終わる．ただし，ここで，ムーンシャイン加群 $V^\natural = \coprod_{n\geqq 0} V_n$ において，V_2, V_3, V_4, V_6 の指標が（少なくとも $g_0, g_1, \cdots, g_6$ の上では）コンウェイ・ノートンの予想したものに等しいことを初めに示しておかなければならない．

ずいぶん長くかかったが（本書でも），これで 10 年以上も懸案であったコンウェイ・ノートン予想が，肯定的に解決されたのである．

第 6 章

頂点作用素代数の自己同型

頂点作用素代数の 1 つであるムーンシャイン加群 $V^\natural$ の自己同型群 $\mathrm{Aut}(V^\natural)$ が散在型単純群モンスター $\mathbb{M}$ となることは，フレンケル・レパウスキー・マーモンが 1980 年代に証明した．すでに，グライス，ティッツによって証明されていたムーンシャイン加群 $V^\natural$ の重さ 2 の部分空間のグライス代数 V_2 の自己同型群が $\mathbb{M}$ に等しいという事実に帰着させるのであるが，その証明は複雑で，見通しが良いとは言えない．

ムーンシャイン加群 $V^\natural$ の自己同型群には位数 2^{25} のエクストラスペシャル群の $Conway_1$ による拡大 $C\,(\cong C_{\mathbb{M}}(z))$ が部分群として入っていることは $V^\natural$ の構成からわかるし，C は $\mathbb{M}$ の極大部分群だから，C に入っていない自己同型 σ を 1 つ構成すれば，$V^\natural$ の自己同型群にモンスター $\mathbb{M}=\langle C,\sigma\rangle$ が含まれることが言える．自己同型群がちょうどモンスター $\mathbb{M}$ に等しいことを最終的には言うのであるが，それをひとまず不問にしても，この新しい元 σ の構成が著しく困難なのである．その証明の複雑さと見通しの悪さは，換言すれば，我々がムーンシャイン加群 $V^\natural$ を十分に理解していないということであろう．いずれにしてもフレンケル・レパウスキー・マーモンによる $\mathrm{Aut}(V^\natural)\cong\mathbb{M}$ の証明は改良されるべきであろう．改良を 1 つの結果として含み，今後のモンスター/ムーンシャインの研究に希望の持てる宮本雅彦の理論をこの章で述べる．V をある種の頂点作用素代数とするとき，$\mathrm{Aut}(V)$ の中に位数 2 の元が「数多く」存在することを宮本の理論は示す．この章の結果の多くは

宮本*1)によるものである．

6.1　頂点作用素代数 $L\left(\frac{1}{2},0\right)$

定義　次の条件を満足する実数体上の頂点作用素代数 V を**ムーンシャイン型**という．

(a) $V=\coprod_{n\in\mathbb{Z}} V_n$ と書くとき，$V_n=0$, $n<0$, $\dim V_0=1$, $V_1=0$.

(b) V は正定値不変双 1 次形式（内積）$\langle\ ,\ \rangle$ を持つ（付録 3 定義 F 参照）．∎

頂点作用素代数 V が条件（a）を満たすならば V の重さ 2 の部分空間 V_2 には，2 つの元 $a,b\in V_2$ の積を $a\times b=a_1b$ と定義することにより，可換代数の構造が入りさらに真空元 $\mathbf{1}$ を用いて $(a,b)\cdot\mathbf{1}=a_3b$ により $(ab,c)=(a,bc)$ を満たす（不変または結合的という）対称双 1 次形式 $(\ ,\ )$ が入る．部分空間 V_2 にその積と内積の構造を入れたものを**グライス代数**と呼ぶ．実は，条件（b）の内積を V_2 に制限したものがグライス代数の内積にもなっている．

この章では頂点作用素代数はムーンシャイン型であるか，もしくは，ムーンシャイン型から $\dim V_1=0$ という条件を除いたものだけを考える．ただし，なるべくその条件は繰り返して述べることにする．（a）のうち $V_1=0$ 以外はあまり人為的な条件ではない．（b）の V は正定値不変双 1 次形式（内積）を持つという条件は考えている頂点作用素代数 V が，表題にあげたような $L\left(\frac{1}{2},0\right)$ 加群として完全可約となっているための十分条件である．

定義　以下の条件（a），（b）でリー代数を定義し，それを Vir_c と書く．K は標数 0 の体であり c は K の元である．

(a) Vir_c は K 上のベクトル空間で，基底 $\{L(n),1\,|\,n\in\mathbb{Z}\}$ を持つ．

(b) $[L(m),L(n)]=(m-n)L(m+n)+\dfrac{1}{12}(m^3-m)c\delta_{m+n,0}$ ∎

注意　本章を通じて，K は有理数体 $\mathbb{Q}$，実数体 $\mathbb{R}$ または，複素数体 $\mathbb{C}$ として失うものはない．$K=\mathbb{C}$ の場合は形式 $\langle\ ,\ \rangle$ はエルミートとする．

---

*1)　あとがきの中の文献［17］，［18］とその中の引用文献参照

$U=U(Vir_c)$ をリー代数 Vir_c の展開環とし，$U^+=U^+(Vir_c)$ を部分集合 $\{L(n)\,|\,n>0\}$ で生成された U の部分環とする．h を K の元とし，v_h をベクトルとして，

$$L(0)v_h=hv_h$$
$$L(n)v_h=0, \quad n>0 \text{ のとき}$$

と $\{L(n)\,|\,n\geqq 0\}$ の v_h への作用を定め，

$$M(c,h)=U(Vir_c)\bigotimes_{\langle U^+,\,L(0)\rangle} Kv_h$$

とおく．$M(c,h)$ は $U(Vir_c)$ の高さ h のヴァーマ（Verma）加群である．また，$L(-1)\otimes v_0$ から生成される部分加群 $U(Vir_c)(L(-1)\otimes v_0)$ は $1\otimes v_0=v_0$ を含まないので，それは真部分加群である．v_h を含まない部分加群の集合の中には，包含関係で最大なものが存在する．それを J としよう．剰余加群

$$L(c,h)=M(c,h)/J$$

は既約であり，$L(c,h)$ はリー代数 Vir_c の高さ h の最高ウエイト既約表現と呼ばれる．$h=0$ のとき，剰余加群

$$\widetilde{M}(c,0)=M(c,0)/U(Vir_c)(L(-1)\otimes v_0)$$

には頂点作用素代数の構造が入るので，特に，$L(c,0)$ には $\widetilde{M}(c,0)$ の剰余加群としての頂点作用素代数の構造が入っている．

V を頂点作用素代数とするとき，V の中には定義によりヴィラソロ元 ω が存在するが ω の頂点作用素

$$Y(\omega,z)=\sum \omega_n z^{-n-1}$$

に対して

$$L(n)=\omega_{n+1}$$

とおけば，

$$[L(m), L(n)] = (m-n)L(m+n) + \frac{1}{12}(m^3 - m)c_V \delta_{m+n,0}, \quad c_V \in K$$

という交換関係を満足する．c_V は頂点作用素代数 V の**中心電荷**（またはランク）と呼ばれる．通常，c と書かれるのであるが，この章では c_V 以外の中心電荷も出てくるので区別する意味で c_V と書いた．V に固有な中心電荷というほどの意味である．集合 $\{L(n), 1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ が線型独立になることもわかり，$\{L(n), 1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ は Vir_{c_V} に同型な $\mathrm{End}(V)$ の部分リー代数の基底となる．$\{L(n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ で生成された $\mathrm{End}(V)$ の（結合的な）部分環を $S_\omega = \langle L(n) \mid n \in \mathbb{Z}\rangle$ とおく．さらに

$$V_\omega = \langle L(n) \mid n \in \mathbb{Z}\rangle \cdot \mathbf{1} = S_\omega \cdot \mathbf{1}$$

とおくと，V_ω は V の部分空間であるが，V の部分頂点作用素代数（定義はすぐ述べる）にもなっている．$L(n) \cdot \mathbf{1} = 0,\ n \geqq -1$，であることにより，$V_\omega$ は $\widetilde{M}(c_V, 0)$ のある剰余加群に同型となっているから頂点作用素代数の構造が入るのであるが，部分頂点作用素代数になっていることと V が V_ω 加群となっていることは示さなければならないが，この場合は明らかであろう．

定義 頂点作用素代数 $V = (V, \mathbf{1}, \omega, Y)$ の部分空間 V' が条件（a）～（d）を満たすとき V' を V の**部分頂点作用素代数**という．

（a）$(V', \mathbf{1}', \omega', Y')$ は頂点作用素代数である．$V' = \coprod_{n \in \mathbb{Z}} V'_n$.

（b）$V'_n \subset V_n$.

（c）$\mathbf{1}' = \mathbf{1}$.

（d）$Y'(w, z) = Y(w, z)$ が V' のすべての元 w に対して成立している． ∎

応用上都合のよいのは，V が Vir_{c_V} 加群として完全可約になっているときであるが，そのときは，

$$V_\omega \cong L(c_V, 0)$$

であり，さらに，V 自身は

$$V \cong \coprod_{h \in \mathbb{N}} m_h L(c_V, h)$$

である．ここで，m_h は V の中に成分として含まれている重さ h の最高ウエイト既約表現 $L(c_V, h)$ に同型な Vir_{c_V} 加群の重複度である．各 V_n の次元は

頂点作用素代数の定義により有限であり，V_n は $L(0)$ の固有値 h に属する固有空間であったから，$m_h \leqq \dim V_h$ で，特に重複度 m_h は有限となる．V が Vir_{c_V} 加群として完全可約になるのは，V に正定値不変双 1 次形式が入っていればよい．さらに V が Vir_c 加群となっていて，その双 1 次形式が Vir_c についても不変 ($\langle L_c(n)u,v\rangle=\langle u,L_c(-n)v\rangle$) であれば，その加群としても完全可約である．

上で見たように頂点作用素代数 V は定義により Vir_{c_V} を自然に含んでいるが，他の $c\in K$ に対応する Vir_c を含んでいることもある．以下，その状況を調べよう．

定義　V を頂点作用素代数とし, e を V の元とする．

$$Y(e,z)=\sum e_n z^{-n-1}=\sum L_e(n)z^{-n-2}$$

によって $L_e(n)$ を定義するとき，$c_e\in K$ が存在して交換関係

$$[L_e(m),L_e(n)]=(m-n)L_e(m+n)+\frac{1}{12}(m^3-m)c_e\delta_{m+n,0}$$

が成立するならば，e を V の**共形元**といい，c_e を e の**中心電荷**という．　▮

V のヴィラソロ元 ω は 1 つの特別な共形元であり，$L(-1)=L_\omega(-1)=\omega_0$ は頂点作用素代数の定義により，

$$Y(L(-1)v,z)=\frac{d}{dz}Y(v,z)$$

を V のすべての 元 v に対して成立させていたのであるが，共形元 e から生ずる $L_e(-1)=e_0$ にはそのような微分の性質は要求しない．

e を V の共形元とし，$\{e_n=L_e(n-1),1\,|\,n\in\mathbb{Z}\}$ で張られた $\mathrm{End}(V)$ の部分空間を Vir_{c_e} とおく．$e\in V_2$ であれば $\langle L_e(n)u,v\rangle=\langle u,L_e(-n)v\rangle$ が成立しているので，V に正定値で不変な双 1 次形式が入っていて V が Vir_{c_e} 加群であれば，V は Vir_{c_e} 加群としても完全可約である．ゆえに，

$$V\cong\coprod_{h\in K}m_hL(c_e,h)$$

と直和に書けている（重複度 m_h は有限とは限らない）．$\{e_n\,|\,n\in\mathbb{Z}\}$ で生成された $\mathrm{End}(V)$ の部分環を S_e とおこう．特に，真空元 1 に S_e を作用させて，

$$S_e \cdot 1 \cong L(c_e, 0)$$

を得る．$c_e = \dfrac{1}{2}$ となる場合が特に重要である．それは，$L\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$ の既約加群が完全に分類されていて，次の **3** 個しかないからである．

定理 頂点作用素代数 $L\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$ の加群はすべて完全可約であり，いかなる既約加群も，

$$L\left(\frac{1}{2}, 0\right),\ L\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),\ L\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{16}\right)$$

のいずれかに同型となる． ∎

ゆえに，$c_e = \dfrac{1}{2}$ となるような共形元 e が存在すれば，V が $L\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$ 加群であれば（例えば V がムーンシャイン型で $e \in V_2$ のとき）

$$V \cong \coprod_{i=0, \frac{1}{2}, \frac{1}{16}} m_i L\left(\frac{1}{2}, i\right)$$

と書ける．$c_e = \dfrac{1}{2}$ となる共形元は次の定理によって定まる．

定理 V をムーンシャイン型の頂点作用素代数としよう．V_2 の元 e が中心電荷 c の共形元であるための必要十分条件は，

$$e_1 e = 2e, \quad e_3 e = \frac{c}{2}\mathbf{1}$$

となることである． ∎

e を共形元とすると，

$$e_1 e = e_1 e_{-1} \cdot \mathbf{1} = [e_1, e_{-1}] \cdot \mathbf{1} = 2e_{-1} = 2e$$

となる．逆に V_2 の元 e が $e_1 e = 2e$ を満たしているとしよう．そのとき

$$e_3 e = \frac{c}{2} \cdot \mathbf{1}$$

がある $c \in K$ の対して成立し，$V_n = 0, n \leqq 0$ と $V_1 = 0$ から $n \geqq 4$ または $n = 2$ のとき

$$e_n e = 0$$

となる．それゆえ

$$
\begin{aligned}
&[e_{m+1}, Y(e,z)] \\
&\quad = \sum_{i\geqq 0} \binom{m+1}{i} Y(e_i e, z) z^{m+1-i} \\
&\quad = Y(e_0 e, z) z^{m+1} + (m+1) Y(2e, z) z^m + \binom{m+1}{3} Y\left(\frac{c}{2}\cdot\mathbf{1}, z\right) z^{m-2}
\end{aligned}
$$

となりさらに

$$
\begin{aligned}
[e_{m+1}, e_{n+1}] &= (e_0 e)_{m+n+2} + 2(m+1) e_{m+n+1} + \binom{m+1}{3} \frac{c}{2}\cdot \mathbf{1}_{m+n-1} \\
&= [e_0, e_{m+n+2}] + 2(m+1) e_{m+n+1} + \binom{m+1}{3} \frac{c}{2} \delta_{m+n,0}
\end{aligned}
$$

となる．e_{i+1} を $\widetilde{L}(i)$ で置き換えると

$$
\begin{aligned}
&[\widetilde{L}(m), \widetilde{L}(n)] \\
&= [\widetilde{L}(-1), \widetilde{L}(m+n+1)] + 2(m+n)\widetilde{L}(m+n) + \frac{(m-1)m(m+1)}{6} \frac{c}{2} \delta_{m+n,0}
\end{aligned}
$$

を得る．m と n を置き換えて，上の式から引くと求めるヴィラソロ交換関係式が出てくる．すなわち e は中心電荷 c の共形元である．

頂点作用素代数 V がムーンシャイン型であると，V_2 には可換代数の構造を

$$ab = a_1 b, \quad a, b \in V_2$$

として入れることができたが，その積を使うと $e_1 e = 2e$ は，

$$ee = 2e$$

を意味する．

$$\left(\frac{e}{2}\right)^2 = \frac{e}{2}$$

と変形できるので，$\frac{e}{2}$ は可換代数 V_2 のベキ等元となる．

定義 頂点作用素代数 V のすべての加群が完全可約であり，同型でない既約加群は高々有限個しか存在しないとき V を**有理型**という． ▎

定義 頂点作用素代数 V の共形元 $e \in V_2$ が有理型の部分頂点作用素代数を真空 $\mathbf{1}$ の上に生成するとき e を有理型という． ▎

定理 $e \in V_2$ を頂点作用素代数 V の共形元とすれば $V_e = S_e \cdot \mathbf{1}$ は部分頂点作用素代数であり，さらに e が有理型であれば V は V_e 加群となる． ▮

V のヴィラソロ元 ω から得られる $\omega_1 = L(0)$ は，頂点作用素代数の定義により，V の上の作用素として対角化できるが，$L(0)$ に対応する $L_e(0) = e_1$ が対角化できるかだけが問題である．それが証明できるので上の定理となる．

注意 以後，本章で考える共形元は断らなくてもすべて有理型とする．

さて，中心電荷が $\frac{1}{2}$ となるような共形元 e がムーンシャイン型の頂点作用素代数の部分空間 V_2 の中に存在したとしよう．$\{e_n \mid e \in \mathbb{Z}\}$ で生成された $\mathrm{End}(V)$ の部分環 S_e が真空元 $\mathbf{1}$ に作用するとき，$L\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ が生ずるのであった．すなわち，

$$V_e = S_e \cdot 1 \cong L\left(\frac{1}{2}, 0\right).$$

e は有理型共形元であって，V は V_e 加群として完全可約である．すべての既約成分は，

$$L\left(\frac{1}{2}, 0\right), \quad L\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad L\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{16}\right)$$

のいずれかに同型なのだから，同型な既約成分の和をとって，

$$V = V^0 \oplus V^{\frac{1}{2}} \oplus V^{\frac{1}{16}}$$

と直和に書くことができる．

6.2 宮本の自己同型

中心電荷 $\frac{1}{2}$ の有理型共形元 $e \in V_2$ が与えられたとし頂点作用素代数 V の自己同型 τ_e, σ_e を定義しよう．前節の最後に書いた $V = V^0 \oplus V^{\frac{1}{2}} \oplus V^{\frac{1}{16}}$ という直和とそのための条件はここでも成立するとする．

定義（**宮本の自己同型**） V を頂点作用素代数とし，$e \in V_2$ を中心電荷 $\frac{1}{2}$

の有理型共形元としよう．次の条件で定義された $\mathrm{End}(V)$ の元 σ_e と τ_e を**宮本の自己同型**と呼ぶ．ただし，Id は自明な作用素である．

（a）（任意の）V に対して $\tau_e|_{V^0\oplus V^{\frac{1}{2}}}=Id$，$\tau_e|_{V^{\frac{1}{16}}}=-Id$.

（b）$V^{\frac{1}{16}}=0$ のとき，$\sigma_e|_{V^0}=Id$，$\sigma_e|_{V^{\frac{1}{2}}}=-Id$. ∎

τ_e は単位元である場合もあるが常に定義されている．σ_e は $V^{\frac{1}{16}}=0$（すなわち $\tau_e=1$）のときに限って定義されている．$\sigma_e\neq 1$ と $\tau_e\neq 1$ は同時には成立しない．$\sigma_e=1$ と書いた場合はもちろん，σ_e が定義されていて自明と解釈することにする．すなわち，$V^{\frac{1}{2}}=V^{\frac{1}{16}}=0$ となっているときである．このときは，σ_e も τ_e も自明な自己同型となる．$V=L\left(\frac{1}{2},0\right)$ とすれば，$V=V^0$ なのだから，そのような例は存在する．

一般の頂点作用素代数 V を考えれば $V^{\frac{1}{16}}\neq 0$ であろう．それゆえ τ_e は通常は単位元ではないと考えられる．しかし V の τ_e で固定される元全体からなる部分頂点作用素代数 V^{τ_e} を考えるとそこでは $(V^{\tau_e})^{\frac{1}{16}}=0$ となるので τ_e は単位元となり，今度は σ_e を考えることができる．このように σ_e は部分頂点作用素代数の上で考えることが多い．

今のところ，σ_e や τ_e は V の線型変換であるが，それらは自己同型なのである．しかし，まず $V=V^0$ となる場合を考えよう．

定理 V を頂点作用素代数とし，$e\in V_2$ を中心電荷 $\frac{1}{2}$ の有理型共形元とする．V を $V_e\cong L\left(\frac{1}{2},0\right)$ 加群として見たとき，V がその既約成分として，$L\left(\frac{1}{2},0\right)$ に同型なもののみを持つならば，

$$V=V_e\otimes U$$

となる．ここで $U=\{v\in V\,|\,e_1v=0\}$ で定義され U も V の部分頂点作用素代数である． ∎

U が頂点作用素代数であることを示そう．$u\in U$ のとき $e_1u=0$ が我々の仮定である．$v\in V_n$ のとき，v_m の写像次数 $(\deg v_m)$ は $n-m-1$ であったから，e_n の写像次数は $2-n-1=1-n$ である．まず $\mathbf{1}\in U$ は明らかである．$e_n=L_e(n-1)$ を思い出せば

$$e_1e_nu=[e_1,e_n]u=-(n-1)e_nu$$

であり，e_1 は V の上に負の固有値を持たないから $n \geqq 2$ ならば $e_n u=0$ となり，また $L\left(\frac{1}{2},0\right)$ は重さ 1 の部分空間を持たないので $e_0 u=0$ もあわせてわかる．まとめると，$e_n u=0,\ n\geqq 0$ となる．さて $v\in U$ とすると $e_1(u_m v)=[e_1,u_m]v=(e_1 u)_m v=0$ となるから U は自分自身の頂点作用素に対して閉じている．また

$$[e_m,u_n]=0$$

がすべての $m,n\in\mathbb{Z}$ に対して成立していることも頂点作用素代数の中での一般式（付録 4）

$$[u_m,v_n]=\sum_{i\in\mathbb{N}}\binom{m}{i}(u_i v)_{m+n-i}$$

からわかる．$f=\omega-e$ は $e_1 f=0$ を満たすので U のヴィラソロ元となる．$f_0=\omega_0-e_0=L(-1)-e_0$ であるが，$e_0 U=0$ より U の上では f_0 と $L(-1)$ の作用が同じになり，f_0 が微分を引き起こすことも言える．これで

$$V\cong V_e\otimes U$$

が証明できた．

この定理により，σ_e，τ_e のどちらも単位元のときは，V は 2 つの部分頂点作用素代数のテンソル積となる．V がそのようなテンソル積の形に書かれていないときは，σ_e または τ_e が定義されているのである．

後で再び述べるが，ムーンシャイン加群 $V^\natural$ のグライス代数 V_2 の単位元は 48 個の互いに直交するベキ等元の和で書かれている．すなわち，

$$\frac{\omega}{2}=\sum_{i=1}^{48}\frac{e^i}{2}$$

である．ここで，$P=\langle\tau_{e^i}\,|\,i=1,\cdots,48\rangle$ とおく．P は初等可換 2 群であり，$W=(V^\natural)^P$ とおくと，W は $V^\natural$ の部分頂点作用素代数となり，さらに $Q=\langle\sigma_{e^i}\,|\,i=1,\cdots,48\rangle$ とおけば $X=W^Q$ は W の部分頂点作用素代数であり，しかもそれは 48 個の $L\left(\frac{1}{2},0\right)$ のテンソル積として書かれていることが上の定理からわかる．

線形写像 σ_e, τ_e を宮本の自己同型と呼んだのだが，それらが確かに V の自己同型になっていることを示そう．$g\in\mathrm{End}(V)$ が頂点作用素代数 V の自己同型であるとは（すなわち $g\in\mathrm{Aut}(V)$ ）$g(\mathbf{1})=\mathbf{1}$, $g(\omega)=\omega$ であってさらに

$$g(Y(v,z)u)=Y(gv,z)gu$$

がすべての $v,u\in V$ に対して成立していることである．z のベキに展開して u を取り除けば

$$gv_ng^{-1}=(gv)_n$$

が $\mathrm{End}(V)$ の中の関係式として，すべての $v\in V, n\in\mathbb{Z}$ に対して成立することと同値である．

中心電荷 $\dfrac{1}{2}$ の有理型共形元 $e\in V_2$ が与えられて

$$V=V^0\oplus V^{\frac{1}{2}}\oplus V^{\frac{1}{16}}$$

と分解するとき $g=\sigma_e$，または $g=\tau_e$ は各成分に ±1 として作用するので，g が自己同型であることを証明するには，$v\in V^i, u\in V^j, i, j\in\left\{0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{16}\right\}$, のとき，$v_nu$ がすべての $n\in\mathbb{Z}$ に関して一斉にしかるべきところに入っていることさえ言えばよい．詳しく述べると，

（1） $v\in V^0, u\in V^j$, または $v\in V^j, u\in V^0, j\in\left\{0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{16}\right\}$ のとき，$v_nu\in V^j$,

（2） $v\in V^{\frac{1}{2}}, u\in V^{\frac{1}{2}}$ のとき，$v_nu\in V^0$,

（3） $v\in V^{\frac{1}{2}}, u\in V^{\frac{1}{16}}$ または $v\in V^{\frac{1}{16}}, u\in V^{\frac{1}{2}}$ のとき，$v_nu\in V^{\frac{1}{16}}$,

（4） $v\in V^{\frac{1}{16}}, u\in V^{\frac{1}{16}}$ のとき，$v_nu\in V^0\oplus V^{\frac{1}{2}}$,

が成立していれば，$g=\sigma_e$ または $g=\tau_e$ は確かに，

$$g(v_nu)=(gv)_ngu$$

を満足している．

$v\in V^i$, $u\in V^j$ のとき，$v_nu\in V^k$ がすべての $n\in\mathbb{Z}$ について同時に成立しているということの意味を考えてみよう．W を $\{v_nu\}_{n\in\mathbb{Z}}$ で張られる V の部分空間としよう．すなわち，

$$W=\langle v_n u \mid v\in V^i,\ u\in V^j,\ n\in\mathbb{Z}\rangle_K$$

この W が環 $S_e=\langle e_n \mid n\in\mathbb{Z}\rangle\subset\mathrm{End}(V)$ で不変であることを示そう．関係式

$$[e_m,v_n]=\sum_{r\in\mathbb{N}}\binom{m}{r}(e_r v)_{m+n-r}$$

を使うと，

$$e_m v_n u=v_n e_m u+\sum_{r\in\mathbb{N}}\binom{m}{r}(e_r v)_{m+n-r}u$$

となる．$e_m u\in V^j$，$e_r v\in V^i$ だから，

$$e_m v_n u\in W$$

となり，W が確かに S_e 不変であることがわかる．

$V_e=S_e\cdot\mathbf{1}$ は有理型であるので，W は V_e 既約加群の直和に分解する．すなわち，

$$W=W^0\oplus W^{\frac{1}{2}}\oplus W^{\frac{1}{16}}$$
$$W^k\cong m_k L\left(\frac{1}{2},k\right)$$

となる．どのような $k\in\left\{0,\frac{1}{2},\frac{1}{16}\right\}$ に対して $m_k\neq 0$ となるかは一般には容易にわかることではない．しかし，そのことが τ_e,σ_e が自己同型であるかないかに大いに関係していることは明白であろう．

設定を一般化しよう．

（1）V : 頂点作用素代数．例： $V=L\left(\frac{1}{2},0\right)$.

（2）S,T,U : V 加群.

例 : $S=L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{16}\right)$,　$T=L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$,　$U=L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

（3）すべての, $s\in S, n\in\mathbb{Z}$ に対して $s_n\in\mathrm{Hom}(T,U)$ が与えられている.

s_n にどのような条件があればよいかを調べよう．U_1 を $\{s_n t \mid s\in S, t\in T, n\in\mathbb{Z}\}$ で張られた U の部分空間としよう．U_1 は V 加群であってほしい．そのためには，

$$v_m s_n t \subset U_1$$

がすべての $v \in V$, $s \in S$, $t \in T$, $m, n \in Z$ に対して満たされていることが必要である．すなわち，$v_m s_n t$ が $s_i v_j t$ という形の元の線形結合で書かれている必要がある．その書かれ方は関係式

$$[v_m, s_n] = \sum_{r \in \mathbb{N}} \binom{m}{r} (v_r s)_{m+n-r}$$

に頼るより他あるまい．このように $v_m s_n$ の t への作用が頂点作用素代数加群として相互関係を満足している必要があるから，

$$I(s,z) = \sum s_n z^{-n-1}$$

とおいたとき，$I(s,z)$ が頂点作用素のようにふるまう必要がある．すなわち，

$$z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_1-z_2}{z_0}\right)Y_U(v,z_1)I(s,z_2)t - z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_2-z_1}{-z_0}\right)I(s,z_2)Y_T(v,z_1)t$$
$$= z_2^{-1}\delta\left(\frac{z_1-z_0}{z_2}\right)I(Y_S(v,z_0)s,z_2)t \qquad \text{(I1)}$$

を要求する．($Y_U(v,z)$ などについては付録 3 定義 H 参照)．そして上式が意味を持つために

$$s_j t = 0 \qquad \text{(I2)}$$

が十分に大きい j に対しては常に成立していることも要求される．頂点作用素代数 $V = \coprod_{n \in \mathbb{Z}} V_n$ とその加群 $M = \coprod_{n \in \mathbb{Q}} M_n$ には重さがついており，ω を V のヴィラソロ元とするとき，$\omega_1 = L(0)$ が各 V_n, M_n にスカラーとして作用している．また $L(-1)$ は V_n を V_{n+1} の中へ移しており V の個々の元 v に対しては $(L(-1)v)_n = -nv_{n-1}$ を満たしており，それは

$$\frac{d}{dz}Y(v,z) = Y(L(-1)v,z)$$

と述べられる．ゆえに，$I(s,z)$ に対しても

$$\frac{d}{dz}I(s,z) = I(L_S(-1)s,z) \qquad \text{(I3)}$$

も要求する．ここで，$Y_S(\omega,z)=\sum L_S(n)z^{-n-2}$ である．あまり説得力のある言い方ではないが，頂点作用素代数の加群も次に述べる**交絡作用素**（intertwining operator, intertwiner）も必要と思われるものを全部仮定するのである．

定義 V を頂点作用素代数とし，S,T,U を V 加群とするとき，写像

$$I:S\to \mathrm{Hom}\,(T,U)\{z\}$$
$$s\to I(s,z)=\sum s_n z^{-n-1},\quad s_n\in \mathrm{Hom}\,(T,U)$$

が上に与えた（I1~I3）を満たす時，$(S\times T\to U)$ 型の交絡作用素と呼ぶ．交絡作用素全体はベクトル空間をなし，$I(S\times T\to U)$ で表わす．（n は $\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{C}$ などの値をとり，場合による．ここではなにも指定しないことにする．） ▌

例えば，$S=T=U=V$ とし，さらに $I(v,z)=Y(v,z)$ とおけば，この I は $(V\times V\to V)$ 型の交絡作用素になっている．$I(S\times T\to U)\neq 0$ であるかどうかが問題である．

$$N_{S,T,V}=\dim I(S\times T\to U)$$

とおこう．

$$N_{V,V,V}\geqq 1$$

は明らかに成立する．交絡作用素への要求は強いものであり，応用上は，

$$0\leqq N_{S,T,U}\leqq 1$$

となっていることが多い．

定義 V を頂点作用素代数とし，S,T,U を V 加群とするとき，

$$S\times T=\sum_U N_{S,T,U}\,U$$

で定義された関係式を V 加群の**フュージョン規則**と呼ぶ．それらを V 加群で張られた空間の上の代数構造とみれば，**フュージョン代数**が定義される． ▌

定理 $V=L\left(\dfrac{1}{2},0\right)$，$S^i=L\left(\dfrac{1}{2},i\right)$，$i=0,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{16}$ とし，$N_{i,j,k}=N_{S^i,S^j,S^k}$ と書くと，（a）~（f）が成立する．

（a）$N_{i,j,k}=N_{j,i,k}$, $i,j,k\in\left\{0,\frac{1}{2}\frac{1}{16}\right\}$,

（b）$N_{0,i,i}=1$, $i=0,\frac{1}{2},\frac{1}{16}$,

（c）$N_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}=1$,

（d）$N_{\frac{1}{2},\frac{1}{16},\frac{1}{16}}=1$,

（e）$N_{\frac{1}{16},\frac{1}{16},i}=1$, $i=0,\frac{1}{2}$,

（f）$N_{i,j,k}=0$,　その他の場合.　∎

これは 165 ページで述べた条件（1）～（4）と同値である．上の定理をフュージョン規則の言葉で述べれば

定理　頂点作用素代数 $L\left(\frac{1}{2},0\right)$ のフュージョン規則は以下の通りである．

（a）$L\left(\frac{1}{2},0\right)$ は単位元として作用する，

（b）$L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\times L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=L\left(\frac{1}{2},0\right)$,

（c）$L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\times L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{16}\right)=L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{16}\right)\times L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{16}\right)$,

（d）$L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{16}\right)\times L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{16}\right)=L\left(\frac{1}{2},0\right)+L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.　∎

交絡作用素を実際に構成する必要があるときには次の定理が使える．

定理　次の設定（a），（b），（c），（d）をせよ．

（a）(V,Y) は頂点作用素代数で，W は V の部分頂点作用素代数．V は W 加群．

（b）W_1,W_2,W_3 は V の中に含まれる W 既約部分加群．

（c）W_3 は W 加群としての V の直和因子（ W 射影を $\pi:V\to W_3$ と書く）．

（d）$w\in W_1$, $w'\in W_2$ に対して，$J(w,z)w'=\pi(Y(w,z)w')$ により $J(w,z)=\sum\widetilde{w}_n z^{-n-1}$ と定義する（$\widetilde{w}_n\in\mathrm{Hom}(W_2,W_3)$ である）．

このとき，実数 λ が存在して，

$$I(w,z)=J(w,z)z^{-\lambda}$$

は，$I(W_1\times W_2\to W_3)$ 型の交絡作用素となる．　∎

この定理を簡単に証明してみよう．W,W_1,W_2,W_3 はすべて V の部分空間なので関係してくる頂点作用素は Y のみである．$J(w,z)$ は V 上の頂点作用素 $Y(w,z)$ の部分空間への射影なので局所可換性とか結合性（ヤコビ律）はほ

とんど明らかである．W のヴィラソロ元 e（すなわち V の共形元）に対して，

$$I(e_0w,z)=\frac{d}{dz}I(w,z)$$

となるかどうかだけが明らかでない．これは V,W の次数付けに関係してくるので無条件には成立しない．仮定（1）により ω_1-e_1 は W の上で 0 である．頂点作用素代数の定義により

$$Y(e_0w,z)=\frac{d}{dz}Y(w,z)$$

が $w\in W$ のとき成立している．また $w\in V$ と考えれば

$$Y(\omega_0w,z)=\frac{d}{dz}Y(w,z)$$

が成立している．すなわち

$$Y((\omega_0-e_0)w,z)=0$$

がすべての $w\in W$ について成立している．関係式

$$(\omega_0-e_0)w=((\omega-e)_0w_{-1})\cdot 1=0$$

により ω_0-e_0 は W の上で恒等的に 0 となる．$f=\omega-e$ とおくとき，頂点作用素代数の一般関係式（付録 4）

$$[u_m,v_n]=\sum_{i\geqq 0}\binom{m}{i}(u_iv)_{m+n-i}$$

を使えば，$w\in W$ のとき

$$[f_0,w_m]=(f_0w)_m=0$$

$$[f_1,w_m]=(f_0w)_{m+1}+(f_1w)_m=0$$

となり f_0,f_1 は $w\in W$ のときすべての w_m と可換になる．さて，W^1,W^2,W^3 を V の部分空間で W の既約加群としよう．f_1 は w_n $(w\in W)$ すべての元と可換なので，W^1,W^2,W^3 の上にスカラー $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ として作用している．ここで $\lambda=\lambda^3-\lambda^1-\lambda^2$ とおき，$w\in W^1$ 対して

$$I(w,z)u = \pi(Y(w,z)u)z^{-\lambda}$$

とおく．ただし π は V から W^3 への W 加群としての射影であった．この設定のもとに $I(w,z)$ は $(W^1 \times W^2 \to W^3)$ 型の交絡作用素になる．$w \in W_1$ のとき

$$I(e_0 w, z) = \frac{d}{dz} I(w,z)$$

を示そう．$w \in W^1, u \in W^2$ に対して

$$\begin{aligned} f_1 w_{m-1} u &= [f_1, w_{m-1}]u + w_{m-1} f_1 u \\ &= (f_0 w)_m u + (f_1 w)_{m-1} u + w_{m-1} f_1 u = (f_0 w)_m u + (\lambda^1 + \lambda^2) w_{m-1} u \end{aligned}$$

より，$(f_0 w)_m u = (f_1 - \lambda^1 - \lambda^2) w_{m-1} u$ が成り立つ．ゆえに，

$$\pi\{(f_0 w)_m u\} = (\lambda^3 - \lambda^1 - \lambda^2)\pi(w_{m-1}u) = \lambda\pi(w_{m-1}u)$$

となる．それゆえ，

$$\begin{aligned} \pi((e_0 w)_m u) &= \pi(((\omega_0 - f_0)w)_m u) \\ &= \pi(-m w_{m-1} u - \lambda w_{m-1} u) = (-m-\lambda)\pi(w_{m-1}u) \end{aligned}$$

を得る．そこで $I(w,z) = J(w,z)z^{-\lambda}$ と定義すると，

$$\begin{aligned} I(e_0 w, z)u &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \pi((e_0 w)_m u) z^{-m-1-\lambda} \\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} (-m-\lambda)\pi(w_{m-1}u) z^{-m-1-\lambda} \\ &= \frac{d}{dz}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}} \pi(w_{m-1}u) z^{-m-\lambda}\Big) = \frac{d}{dz} I(w,z) \end{aligned}$$

となり，微分の条件を満足している．

これで $I(w,z)$ が $(W^1 \times W^2 \to W^3)$ 型の交絡作用素となっていることが証明できた．$\pi(Y(w,z)|_{W^2})$ が 0 でなければ，$I(w,z)$ も 0 ではない．

交絡作用素はその持つべき性質が頂点作用素とほとんど同じなので実際に構成するのは結局頂点作用素を使うことになる．まわりくどい説明ではあったが，これで宮本の自己同型 τ_e, σ_e が名実ともに定義された．もう少し一般的な定理を述べておこう．

定理　e を V_2 の中心電価 c の有理型共形元とし，

$$\tau : L(c,h) \to \xi_h L(c,h), \quad \xi_h \in K$$

が頂点作用素代数 $L(c,0)$ のフュージョン代数の自己同型としよう．このとき

$$\tau_e(v_h) = \xi_h v_h, \quad v_h \in V^h$$

は V の自己同型である．∎

6.3　自己同型群

今までは頂点作用素代数 V の 1 つの有理型共形元 e から生ずる自己同型について述べてきたが，V はそのような共形元を多く持ち得る．

定義　共形元 e, e' が $e_1 e' = e'_1 e = 0$ を満たすとき e と e' は**直交**すると言う．∎

補題　$e \in V_2$ を中心電荷 $\dfrac{1}{2}$ の有理型共形元として $f \in V_2$ とする．もし $e_1 f = 0$ ならば $[e_m, f_n] = 0$ がすべての $m, n \in \mathbb{Z}$ について成立する．∎

補題の証明は $e_n f = 0$ がすべての $n \geqq 0$ について言えることを使えばよいが，前節で $\tau_e = 1, \sigma_e = 1$ となる場合は V がテンソル積になる，という定理の証明の中で述べたことと同様なことをすればよい．$f_1 e = f_1 e_{-1} \cdot \mathbf{1} = e_{-1} f_1 \cdot \mathbf{1} = 0$ も得られる．実は e, e' が有理型という条件の下では，$e_1 e' = 0$ から $e'_1 e = 0$ が従うのである．宮本の自己同型 τ_e, σ_e が共形元 e を固定するのは e が V^0 成分に入っていることから明らかだが，上の補題を使えば 有理型共形元 e, e' が互いに直交しているときは $[\tau_e, \tau_e] = 1, [\sigma_e, \sigma_{e'}] = 1$ が成立することも見てとれよう．しかも

$$\tau_e = e^{16\pi i e_1}, \quad \sigma_e = e^{2\pi i e_1}$$

と表示できる．

中心電荷 $\dfrac{1}{2}$ の有理型共形元 e, e' が直交するならば $V_e \otimes V_{e'} \cong L\left(\dfrac{1}{2}, 0\right) \otimes L\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$ は部分頂点作用素代数となる．

定義　共形元 e は直交する 2 つの共形元の和で書けないとき**直既約**と呼ばれる. ∎

頂点作用素代数 V のヴィラソロ元 ω は直既約であろうか. $V=V_e=S_e\cdot\mathbf{1}\cong L\left(\frac{1}{2},0\right)$ のときは, $\dim(V_2)=1$ だから e はもちろん直既約である. V_e が大きな V の中に入っているときは, 同じ e が V の中で直既約とは限らない.

定理　$e\in V_2$ をムーンシャイン型の頂点作用素代数に含まれる直既約な共形元とすれば e_1 は V_2 の上の線形写像を引き起こすが, 固有値 2 に属する固有空間の次元は 1 である. 一般に, e の中心電荷 c が $0<c<\frac{1}{2}$ ならば e は直既約である. ∎

この結果によって, V_2 の次元が 1 より大きいときはヴィラソロ元 ω は直既約ではあり得ないことがわかる. なぜならば, $\left(\frac{\omega}{2}\right)_1$ は V_2 の上に単位写像として作用しているからである. 実際, ムーンシャイン加群 $V^\natural$ では $\dim(V_2)=196884$ であって, ヴィラソロ元 ω は 48 個の互いに直交する直既約な中心電荷 $\frac{1}{2}$ の有理型共形元の和に書ける.

共形元という性質は, それが含まれる頂点作用素代数にはよらない性質である. すなわち, e がある頂点作用素代数 W の中の共形元であれば, W を部分頂点作用素代数として含んでいる頂点作用素代数 V の中に e が含まれていても, それはやはり V の共形元である. 特に e の中心電荷が $\frac{1}{2}$ ならば e を有理型共形元として含むいかなる頂点作用素代数にもその上の自己同型 τ_e または σ_e を考えることができる. それゆえ, そのような共形元を多く含む頂点作用素代数は大きな自己同型群を持つと考えられる. また逆に, 単位元でない自己同型を持っている頂点作用素代数をいくつかテンソル積などで組み合わせることにより大きな自己同型群を持つ頂点作用素代数を構成することもできる.

g を頂点作用素代数 V の自己同型とすると, $g(e)$ も中心電荷が $\frac{1}{2}$ の有理型共形元であり,

$$g\tau_e g^{-1}=\tau_{g(e)},\quad g\sigma_e g^{-1}=\sigma_{g(e)}$$

である. それゆえ, τ_e 全体で生成される部分群も σ_e 全体で生成される部分群も全自己同型群 $\mathrm{Aut}(V)$ の中の正規部分群となっている.

定義　τ_e,σ_e をそれぞれ τ-型, σ-型の自己同型という. また $\tau_e\neq 1$ となる

中心電荷 $\frac{1}{2}$ の有理型共形元 e を τ 型といい，$\tau_e=1$ となる有理型共形元 e を σ 型という． ▌

全自己同型群が有限群となっている場合に我々の興味があるのだが，ムーンシャイン加群 $V^\natural$ の場合には共形元の性質を使ってそのことが証明できるのでそれを示してみよう．まず e が中心電荷 $\frac{1}{2}$ を持つ共形元であるのは $\langle e,e\rangle=\frac{1}{4}$ のときであることに注意しよう．（$\langle e,e\rangle\cdot\mathbf{1}=e_3e\cdot\mathbf{1}$ であるから．）

定理　V はムーンシャイン型頂点作用素代数とする．$e,f\in V_2$ を 2 つの相異なる有理型共形元で

$$\langle e,e\rangle=\langle f,f\rangle=\frac{1}{4}$$

とする．このとき，

$$\langle e-f,e-f\rangle\geqq\frac{1}{3}$$

が成り立つ． ▌

この定理により自分自身との内積が $\frac{1}{4}$ となる有理型共形元は有限個しかないことがわかる．定理を簡単に証明してみる．グライス代数の分解

$$V_2=Ke\oplus e^\perp$$

を考える．$e^\perp$ 上で 線形写像 e_1 の固有値は 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{16}$ のみであることを示そう．e から生成された頂点作用素代数 V_e は $L\left(\frac{1}{2},0\right)$ に同型なので，共形元の作用 e_1 の固有値は $\mathbb{N}$, $\frac{1}{2}+\mathbb{N}$, $\frac{1}{16}+\mathbb{N}$ である．$v\in\langle e\rangle^\perp$ が既約 V_e 加群の最高次ウエイトベクトルでないとすると，ある $n\geqq2$ があって $e_nv\neq0$ となる．V はムーンシャイン型と仮定してあるから $n=3$ となる．このときは $e_3v=\langle e,v\rangle\mathbf{1}=0$ となり矛盾である．よって，V_2 の元は最高ウエイトベクトルだけなので，固有値は 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{16}$ となる．分解 $V_2=Ke\oplus e^\perp$ に対応して定理で与えられた元 f を

$$f=re+u,\quad r\in\mathbb{R},\ u\in e^\perp$$

と表示する．このとき，$eu\in e^\perp$ なので，$e^2=2e$, $f^2=2f$ などに注意して，

$$f^2=2f=2re+2u=(re+u)^2=\{2r^2e+u_e^2\}+\{(u^2-u_e^2)+2reu\}$$

より，$2re=2r^2e+u_e^2$ を得る．u_e^2 は u^2 の $Ke\oplus e^{\perp}$ における第1成分を表わす．

$$\frac{1}{4}=\langle f,f\rangle=\frac{r^2}{4}+\langle u,u\rangle$$

から，$\langle u,u\rangle=\frac{1}{4}(1-r^2)$ を得る．ゆえに，$eu\in V_2$ を e_1 の固有ベクトルのスカラー倍の和に書いてから計算すると

$$\begin{aligned}\frac{r-r^2}{2}&=\langle e,2(r-r^2)e\rangle=\langle e,u_e^2\rangle=\langle e,u^2\rangle\\&=\langle eu,u\rangle\leqq\frac{1}{2}\langle u,u\rangle=\frac{1}{8}(1-r^2)\end{aligned}$$

を得るので，$3r^2-4r+1\geqq 0$，すなわち $r\geqq 1$ または $r\leqq\frac{1}{3}$ を得る．$r>1$ は $\langle u,u\rangle<0$ となってしまい，$\langle\ ,\ \rangle$ が正定値であることに矛盾するので，$r\leqq\frac{1}{3}$ であり，$\langle e,f\rangle\leqq\frac{1}{12}$ が成立し定理の証明が終わる．

この定理を使いムーンシャイン加群 $V^\natural$ の全自己同型群が有限位数を持つことを示そう．$E=\{e^i\,|\,i\in I\}$ を V_2 に含まれている中心電荷 $\frac{1}{2}$ の有理型共形元全体の集合とする．I はある有限の指数集合である．背理法で証明することにし，$\mathrm{Aut}(V^\natural)$ は無限群と仮定しよう．G を E のすべての元を固定する $\mathrm{Aut}(V^\natural)$ の部分群とする．G も無限群である．

ムーンシャイン加群 $V^\natural$ のグライス代数 V_2 の単位元は互いに可換な48個のベキ等元の和で書かれていた．すなわち，

$$\frac{\omega}{2}=\sum_{i=1}^{48}\frac{e^i}{2}.$$

ここで，$P=\langle\tau_{e^i}\,|\,i=1,\cdots,48\rangle$ とおく．P は基本アーベル2群であり，P は群 GP の中心に入る．$V^\natural$ を次のように P の指標によるウエイト空間の直和に分解する：

$$V^\natural=\coprod_{\chi\in\mathrm{ch}(P)}(V^\natural)^\chi.$$

$(V^\natural)^\chi$ は $(V^\natural)^P$ 加群として既約である（付録3定理E）．このとき，G は，$[G,P]=1$ であるから，各 $(V^\natural)^\chi$ に作用している．$W=(V^\natural)^P$ とおこう．W

は $V^\natural$ の部分頂点作用素代数であり，その上には σ–型の自己同型が定義される．

$Q=\langle \sigma_{e^i} \,|\, i=1,\cdots,n\rangle$ も $\mathrm{Aut}(W)$ の初等可換 2 群である．W を Q の指標によるウエイト空間の直和に分解して，

$$W = \coprod_{\phi \in \mathbf{ch}(Q)} (W)^\phi$$

とおく．群 G は W の上に作用し，その作用の意味で，$[G,Q]=1$ である．宮本の自己同型を定義したとき述べたように，$W^Q=T$ は $L\left(\frac{1}{2},0\right)$ のテンソル積 $\bigotimes_{i=1}^{48} L\left(\frac{1}{2},0\right)$ となっている．これらは，真空元から e^i_m の作用だけで生成されるので，G は W^Q のすべての元を固定する．このとき，G は既約 T 加群 W^ϕ 上にスカラー倍として作用するが，v を W^ϕ に含まれている V のヴィラソロ代数 Vir の最高ウエイトベクトル $(L(1)v=L(2)v=0)$ とするとき $0\neq v_{2n-1}v=\langle v,v\rangle\cdot\mathbf{1}\in T$ となるので，スカラーの可能性は ±1 だけである．ゆえに，G の部分群で W^ϕ のすべての元を固定するものは G の中で有限指数である．さらに $(V^\natural)^P$ のすべての元を固定する G の部分群 G_1 も無限群である．G を G_1 に置き換え，W を

$$V^\natural = \coprod_{\chi \in \mathbf{ch}(P)} (V^\natural)^\chi$$

に置き換え，同じように議論すれば，$V^\natural$ すべての元を固定する $\mathrm{Aut}(V^\natural)$ の部分群は単位群であるべきものが無限群になり，これで矛盾が得られた．ゆえに $V^\natural$ の自己同型群は有限である．

一般的な頂点作用素代数 V では宮本の自己同型 τ_e は単位元ではないと考えられるが，上の証明で見たように，その部分頂点作用素代数である $W=(V^\natural)^P$ では σ–型の自己同型が主役である．

定理　e, f を（中心電荷 $\frac{1}{2}$ の）σ–型の有理型共形元とする．このとき，その積 $\sigma_e\sigma_f$ の位数は 3 以下である．特に，σ–型の有理型共形元 e による σ_e 全体の生成する $\mathrm{Aut}(V)$ の部分群は **3–互換群**である．　∎

証明はしないが，$[\tau_e,\tau_f]=1$ から $\langle e,f\rangle=0$ または $\langle e,f\rangle=\frac{1}{8}\langle e,e\rangle$ をまず示し，$\langle e,f\rangle=0$ のとき $(\sigma_e\sigma_f)^2=1$，$\langle e,f\rangle=\frac{1}{8}\,\langle e,e\rangle$ のとき $(\sigma_e\sigma_f)^3=1$ であ

ることを示す.

G を 3-互換群とするとき $G/O_3(G)O_2(G)$ の構造はフィッシャー（B. Fischer）によって分類されている．このように σ-型の有理型共形元から生ずる群はよく知られた群となる．しかし一方，σ-型の有理型共形元がいつでも存在するとは限らない．実際，単純群モンスター $\mathbb{M}$ は 3-互換群ではないので $V^\natural$ は σ-型の有理型共形元を 1 つも持っていない.

定理 有理型共形元 e に対して 常に $\tau_e \neq 1$ となっているとすると，e とその自己同型 τ_e は一対一に対応する. ∎

モンスター単純群 $\mathbb{M}$ では τ_e は 2_A と名付けられた位数 2 の元の共役類に属しているが，$\langle e,f\rangle=0$ のときは $\tau_e\tau_f$ は 2_B という共役類に属している位数 2 の元となり，$\langle e,f\rangle=\frac{1}{8}\langle e,e\rangle$ なら $\tau_e\tau_f$ は再び 2_A の共役類に属する.

共形元の効用を説明してきたが，そのような共形元が実際になければ話がはじまらない．フレンケル・レパウスキー・マーモンによって構成されたムーンシャイン加群 $V^\natural$ の中に 1 つの中心電荷 $\frac{1}{2}$ の共形元を見つけることもまったく自明なことではない．またそのような元が全部でいくつあるかなどということも頂点作用素代数の中の議論だけではなかなか決まるとは思われない.

6.4 $L\left(\frac{1}{2},0\right)$ のテンソル積

ムーンシャイン加群 $V^\natural$ や，そのほかの格子 L から構成された頂点作用素代数 V_L の中に，$\left\{L\left(\frac{1}{2},h\right)\,\middle|\,h=0,\frac{1}{2},\frac{1}{16}\right\}$ やそれらのテンソル積を見つけることを次の課題にする.

L を正定値偶格子とし，$V_L=S(\widehat{L}^-)\otimes K\{L\}$ を L から $K=\mathbb{R}$ の上に標準的に構成された頂点作用素代数とする．x を $\langle x,x\rangle=4$ となる格子の元とすると，次のような 2 つの互いに直交する中心電荷 $\frac{1}{2}$ の有理型共形元が得られる：

$$e(x)^+=\frac{1}{16}x(-1)^2+\frac{1}{4}(e^x+e^{-x})$$

$$e(x)^-=\frac{1}{16}x(-1)^2-\frac{1}{4}(e^x+e^{-x}).$$

この 2 つの共形元の和 $e(x)^+ + e(x)^-$ は中心電荷 1 の共形元であり，1 次元格子 $\mathbb{Z}x$, $\langle x,x\rangle = 4$ から構成された頂点作用素代数のヴィラソロ元となる．また一般の L にもどって $\langle y,y\rangle = 4$, $\langle x,y\rangle = 0$, $x,y \in L$ なら $e(x)^\pm$ と $e(y)^\pm$ は互いに直交する．

ムーンシャイン加群の場合には $e = e(x)^\pm$, $f = e(y)^\pm$ のとき，x,y によらない位数 2 の元 θ があって，$\langle x,y\rangle \in 2\mathbb{Z}+1$ ならば $(\tau_e\tau_f)^2 = \theta$ となり，$\langle x,y\rangle \in 2\mathbb{Z}$ ならば $(\tau_e\tau_f)^2 = 1$ となる．L の長さ $\sqrt{4}$ の元から構成された共形元による自己同型 τ_e 全体の成す群 Q は 2 群となり，Q の中心に θ を含み剰余群 $Q/\langle\theta\rangle$ は初等可換 2 群である．L をリーチ格子とすると，Q は モンスター $\mathbb{M}$ の中の 2_B と呼ばれている位数 2 の元の中心化群 $C_{\mathbb{M}}(2_B)$ の極大正規 2 部分群 $O_2(C_{\mathbb{M}}(2_B))$，すなわち位数 2^{25} のエクストラスペシャル群となっている．

上に述べた $e(x)^\pm$ の構成をさらに精密に行うと，$V^\natural$ には互いに直交する（$e_1^ie^j = 0, i \neq j$）中心電荷 $\dfrac{1}{2}$ の有理型共形元の集合 $\{e^1, \cdots, e^{48}\}$ があってそれらの和 $\sum_{i=1}^{48} e^i$ が $V^\natural$ のヴィラソロ元 ω となっていることがわかる．このような性質を満たす単純頂点作用素代数の構成とその分類は宮本雅彦によって始められた．

このような頂点作用素代数の例は，（24 次元の）ニーマイヤー（H. -V. Niemeier）格子 N から構成された頂点作用素代数 V_N，さらにそれらからムーンシャイン加群 $V^\natural$ のように派生した頂点作用素代数である．それらの場合はヴィラソロ元 ω は 48 個の互いに直交する中心電荷 $\dfrac{1}{2}$ の直既約な有理型共形元の和となっている．それらの例を念頭に入れて次の設定（仮定）をおこう．

設定 （a）$V = \coprod_{i=0}^{\infty} V_i$ は単純頂点作用素代数，特に，V は自明でない部分加群を持たない．

（b）V のヴィラソロ元 ω は互いに直交する中心電荷 $\dfrac{1}{2}$ の有理型共形元 $e^1, \cdots, e^n$ の和となっている． ▎

上の設定で与えられた n 個の共形元 e^i は $L\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$ と同型な部分頂点作用素代数 V_{e^i} を生成し，それら全体 T はテンソル代数

$$\bigotimes_{i=1}^{n} L\left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

と同型な V の部分頂点作用素代数となる．明らかに T と V は同じヴィラソロ

元 ω を持っている．T 加群の構造は簡単で，既約な T 加群 W は各々の既約 V_e 加群のテンソル積，すなわち，$W \cong \bigotimes_{i=1}^{n} L\left(\frac{1}{2},h_i\right)$ であり，W が決まれば高さの列 $(h_1,\cdots,h_n)$ が 1 つ決まる．ここで，$h_i \in \left\{0,\frac{1}{2},\frac{1}{16}\right\}$ である．既約 T 加群 W があたえられたとき，その高さの列 $(h_1,\cdots,h_n)$ を $h(T,W)=h(W)$ で表わすことにする．W が既約でなくても，その既約成分がすべて T 加群として同型ならば $h(W)$ という記号を用いることにする．

各々の有理型共形元 e^i は自己同型 τ_{e^i} を定義する．$e^1,\cdots,e^n$ は互いに直交しているので，$\tau_{e^i}, i=1,\cdots,n$ は互いに可換となり，$P=\langle \tau_{e^i} \mid i=1,\cdots,n\rangle$ とおけば P は基本アーベル 2 群である．

P の既約表現全体 $\mathrm{ch}(P)$ による固有空間への分解を

$$V=\bigoplus_{\chi\in \mathrm{ch}(P)} V^{\chi}$$

と書く．前にすでに出てきた記号だが $V^{\chi}=\{v\in V \mid gv=\chi(g)v,\ g\in P\}$ である．宮本の自己同型 τ_e の定義より，部分頂点作用素代数 $V^1=V^P$ は $T\cong \bigotimes_{i=1}^{n} L\left(\frac{1}{2},0\right)$ 加群とみて，$L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{16}\right)$ に同型な成分が含まれていない．

この V^P のように $L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{16}\right)$ に同型な成分が含まれていない頂点作用素代数は後で構成するコード頂点作用素代数となる．なお，V^{χ} は V^P の既約加群であり，それから 1 つの 2 元体コードが定まることを以下に示す．

$\chi(\tau_i)=(-1)^{a_i}\quad (a_i=0,1)$ で a_i を定義する．V^{χ} のすべての既約 T 部分加群は

$$a_i=1 \text{ ならば}, i \text{ 番目が } L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{16}\right),$$

$$a_i=0 \text{ ならば}, i \text{ 番目は } L\left(\frac{1}{2},0\right) \text{ または } L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

となっている．$\tau(V^{\chi})=(a_1,\cdots,a_n)$ とおくと，それは 2 元体コード語を与えている．このようにして得られる 2 元体コード語を τ コード語と呼ぶ．それは成分 $L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{16}\right)$ の存在する位置を示すコード語である．さらに $\tau(V,P)=\{\tau(V^{\chi}) \mid \chi\in \mathrm{ch}(P)\}$ とおくとき，$\tau(V,P)$ は線形コードである．その理由は，任意の $0\neq v\in V^{\chi}, 0\neq v'\in V^{\chi'}$ に対して $n\in\mathbb{Z}$ が存在して $v_n v'\neq 0$ とできる

ので（付録 3 定理 A）$V^{\chi''}$ を $v_n v'$ が含まれる既約成分とすれば $\tau(V^{\chi''}) = \tau(V^{\chi}) + \tau(V^{\chi'})$ となっているからである．フュージョン代数がコード語の和とうまく融合しているのである．もっとも，そうだから τ_e, σ_e などの自己同型が定義できたのである．

頂点作用素代数は $L(0) = \omega_1$ の固有空間の和として $\mathbb{Z}$ で次数が付けられているから，$\tau(V^{\chi}) = (a_1, \cdots, a_n)$ に現われる a_i の和に $\dfrac{1}{16}$ を掛けた数は整数または半整数でなければならない．まとめると，次の定理が成立する．

定理　$\tau(V,P)$ は線形コードであり，$\tau(V^{\chi}) = (a_1, \cdots, a_n)$ のとき，0 でない a_i の個数は 8 で割りきれる．▎

分解 $V = \bigoplus_{\chi \in \mathrm{ch}(P)} V^{\chi}$ を考え，それを使って $\tau(V,P)$ という線形コードを得た．次に素材にする頂点作用素代数を少し小さくして V^P を考察しよう．すなわち，$T = \bigotimes_{i=1}^{n} L\left(\dfrac{1}{2}, 0\right) \subset V^P$ なので，T 加群として，V^P を考えるのである．その考察から我々はもう 1 つの線形コード $D(P)$ を得られることを以下示す．T は有理型なので，V^P は既約 T 加群の直和に分解する．既約 T 加群 W は $\bigotimes_{i=1}^{n} L\left(\dfrac{1}{2}, h_i\right)$ の形を持つ．ここで，$h_i = 0, \dfrac{1}{2}$ である．部分頂点作用素代数 V^P の中には $L\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{16}\right)$ に同型となる成分はないからである．h_i を 2 倍して，0,1 とし，さらにそれを 2 元体の元と考え

$$D = D(P) = \left\{ (2h_1, \cdots, 2h_n) \;\middle|\; \bigotimes_{i=1}^{n} L\left(\frac{1}{2}, h_i\right) \subset V^P \right\}$$

と定義する．D は 2 元体コードである．D の元を σ コード語と呼ぶ．V^P の最高次ウエイトはすべて整数なので，$h_i = \dfrac{1}{2}$ となる $L\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ 成分は偶数個なければならない．ゆえに D は偶コードである．D が線形コードであることは $\tau(V,P)$ が線形コードであるのと同様の議論で示すことができる．V^P がやはり単純頂点作用素代数となることに注意すればよい（付録 3 定理 E）．

以上の考察より，我々は 2 つの 2 元体線形コード $\tau(V,P), D(P)$ を得ることができた．

定理　$\tau(V,P)$ と $D(P)$ は直交する．▎

$\sigma = (a_1, \cdots, a_n) \in D(P)$，$\tau = (b_1, \cdots, b_n) \in \tau(V,P)$ としよう．σ と τ との内積を通常の意味の $\mathbb{Z}$ の中でとれば，それは集合 $I = \{i \mid a_i \cdot b_i = 1\}$ の元の個数

N である．N が偶数であることを言えばよい．W をコード語 σ に属する 既約 T 加群とし，W' をコード語 τ に属する 既約 T 加群とする．添数 i が集合 I に属しているということは，$\left\{L\left(\frac{1}{2},h\right)\middle| h=0,\frac{1}{2}\right\}$ のテンソル積であある W の i 番目に $L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 成分があり，$\left\{L\left(\frac{1}{2},h\right)\middle| h=0,\frac{1}{2},\frac{1}{16}\right\}$ のテンソル積である W' の i 番目に $L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{16}\right)$ 成分があるということである．元 $w\in W$, $w'\in W'$ を適当に選べば，$n\in\mathbb{Z}$ が存在して $w_nw'\neq 0$ となっている．W'' を w_nw' が属している既約 T 加群としよう．

$$(h_1^W,\cdots,h_n^W),\quad (h_1^{W'},\cdots,h_n^{W'}),\quad (h_1^{W''},\cdots,h_n^{W''})$$

をそれぞれの加群の高さの列とする．W'' の高さは，フュージョン規則 $W\times W'$ により定まっている．$h_i^{W'}=\frac{1}{16}$ となる i の集合と $h_i^{W''}=\frac{1}{16}$ となる i の集合は，まったく同じであるから，まずそれを除外して考えよう．その他の i の集合を J とすれば，$\sum_{j\in J}h_j^{W'}$ と $\sum_{j\in J}h_j^{W''}$ はともに整数であるか，または，ともに半整数でなければならない．フュージョン規則を記号的にかくと

$$0\times 0=0,\quad 0\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2},\quad \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=0$$

であったから，集合 $\left\{j\in J\middle| h_j^W=\frac{1}{2},\ h_j^{W'}\neq\frac{1}{16}\right\}$ が偶数個の元を含まなければならないことが言える．σ は偶コード語であったから N が偶数であることも言える．

線形コード $\tau(V,P)$ は τ-型の宮本の自己同型から生成される初等可換 2 群 P の既約指標をつかって定義したが，$D(P)$ も同様に σ-型の自己同型を使って定義できる．実際，$\sigma_i=\sigma_{e^i}$ とおくと，

$$Q=\langle\sigma_i : i=1,\cdots,n\rangle\subset \mathrm{Aut}\,(V^P)$$

は初等可換 2 群であり，Q の各既約指標 χ の固有空間

$$(V^P)^\chi=\{v\in V^P\mid gv=\chi(g)v,\ g\in Q\}$$

と $\bigotimes_{i=1}^{n}L\left(\frac{1}{2},h_i\right)$ で $\chi(\sigma_i)=(-1)^{2h_i}$ であるものとが σ_i の定義から一致する．

すなわち，χ と σ コード語 $(2h_1,\cdots,2h_n)$ とが対応する．

6.5 コード頂点作用素代数の構成

この節では，任意の 2 元体偶線形コード D が与えられたとき，それに付随するコード頂点作用素代数 M_D を構成する．ムーンシャイン頂点作用素代数 $V^\natural$ のある初等可換 2 群 P による固定空間 $(V^\natural)^P$ がその一例である．この $(V^\natural)^P$ に対して偶線形コード D が存在して $(V^\natural)^P \cong M_D$ となっているのである．まず，あらすじを述べよう．

(1) 空間 $M=L\left(\frac{1}{2},0\right)\oplus L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ に**頂点作用素超代数**という代数構造が入ることを示す．$M^0=L\left(\frac{1}{2},0\right)$, $M^1=L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ と書くことにする．M の元 v に対して頂点作用素 $Y(v,z)$ が定義できていることになる．

(2) $M=M^0\oplus M^1$ の n 個のテンソル積

$$F=(M^0\oplus M^1)\otimes(M^0\oplus M^1)\otimes\cdots\otimes(M^0\oplus M^1)$$

を考える．F の元 v に対しての頂点作用素 $Y(v,z)$ は当然テンソル積で定義する．

(3) 長さ n の 2 元体コード語 $\alpha=(a_1,\cdots,a_n)$ に対して，F の部分空間 F_α を

$$F_\alpha=\langle v^1\otimes\cdots\otimes v^n\in F \mid v^i\in M^{a_i}\rangle_K$$

と定義する．すなわち F_α は $\langle\ \ \rangle$ 内の元で張られた K 線形空間である．

(4) 第 3 項で定義された F_α を 2 元体偶線形コード D のすべて元に対して定義し，それら全部を集めて

$$\widetilde{M}_D=\bigoplus_{\alpha\in D}F_\alpha$$

とおく．

(5) 十分大きい自然数 N と任意の $u\in F_\alpha, v\in F_\beta$ に対して

$$(z-w)^N Y(u,z)Y(v,w)=(-1)^{\langle\alpha,\beta\rangle}(z-w)^N Y(v,w)Y(u,z)$$

が成立することを示す．この関係を**局所超可換性**と呼ぶ．

(6) ほしいのは頂点作用素代数であって頂点作用素超代数ではないので，第5項の $(-1)^{\langle\alpha,\beta\rangle}$ はなくなってほしい．そこで D の ± 1 による中心拡大 $\widetilde{D}=\{\pm\epsilon^{\alpha}\,|\,\alpha\in D\}$ をうまくとってきて

$$M_D=\bigoplus_{\alpha\in D}(F_{\alpha}\otimes\epsilon^{\alpha})$$

を考え，頂点作用素

$$Y(v\otimes\epsilon^{\alpha})=Y(v,z)\otimes\epsilon^{\alpha}$$

を定義し，それについて局所可換性を示す．

(7) 真空元，ヴィラソロ元を定義し，M_D が頂点作用素代数であることを示す．

定義 2元体 $\{0,1\}$ で次数の付けられた代数を**超代数**と呼ぶ．A を超代数とすれば

$$A=A^0\oplus A^1$$

と書けており，2項演算は

$$A^iA^j\subset A^{i+j}$$

を満たす． ∎

定義 $V=V^0\oplus V^1$ と書けていて，任意の $v_i\in V^i$, $v_j\in V^j$ に対して十分大きい自然数 N が存在して

$$(z-w)^N\{Y(v_i,z)Y(v_j,w)-(-1)^{ij}Y(v_j,w)Y(v_i,z)\}=0$$

が成立しているとき，V を**頂点作用素超代数**という．$Y(v_i,z),Y(v_j,w)$ などの定義，またそのほかの性質はもちろん頂点作用素代数の場合と同じである．特に，V^0 は頂点作用素代数となっている． ∎

(1)～(7) を少し詳しく説明しよう．

$L=\mathbb{Z}x$ を一次元格子で $\langle x,x\rangle=1$ とする．まずフレンケル・レパウスキー・マーモンによる格子頂点作用素代数の構成に従って，頂点作用素超代数 V_L を

構成する．$\mathfrak{h}=Kx$ を不変内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を持つ可換リー代数と考え，それのアフィンリー代数

$$\widehat{\mathfrak{h}}=\mathfrak{h}[t,t^{-1}]\oplus Kc$$
$$[h\otimes t^m, h'\otimes t^n]=m\langle h,h'\rangle c\delta_{m+n,0}, \quad h,h'\in\mathfrak{h} \qquad [\widehat{\mathfrak{h}},c]=0$$

を構成して，その t の負のベキの部分 $\mathfrak{h}[t^{-1}]t^{-1}$ の対称テンソル代数 $M(0)$ を考え，それを $\widehat{\mathfrak{h}}'=[\widehat{\mathfrak{h}},\widehat{\mathfrak{h}}]$ の展開環 $U(\widehat{\mathfrak{h}}')$ の最高ウェイト 0 のヴァーマ加群と同一視する．頂点作用素が作用する空間を

$$V_L=\coprod_{a\in L} M(0)e^a$$

とする（$M(0)e^a$ は $M(0)\otimes e^a$ の省略形）．頂点作用素を

$$Y(e^a,z)=\exp\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\frac{a(-n)}{n}z^n\right)\exp\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\frac{a(n)}{-n}z^{-n}\right)e^a z^a,$$
$$Y(a(-1)e^0,z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a(n)z^{-n-1}$$

と定義する．ここで，$a\in\widehat{\mathfrak{h}}'$ に対する $a(n)$ は $a\otimes t^n$ の V_L への作用を表わしており，$a(n)=a\otimes t^n$ と同一視してよい．$e^ae^b=e^{a+b}$ で，$z^ae^b=z^{\langle a,b\rangle}e^b$ は次数を合わせるための作用素である．さらに，$a\in L$, $h\in\mathfrak{h}$ に対して $h(0)e^a=\langle h,a\rangle e^a$ と定義する．その他の元に対しての頂点作用素は省略する．要するに，よく知られた頂点作用素の構成を繰りかえしただけである．このとき次の定理が成立する．V_L が頂点作用素超代数になったということである．

定理

$$(x-z)^N[\textstyle\sum a(n)x^{-n-1},Y(e^b,z)]=0 \qquad (\text{すべての } a,b\in L \text{ に対して}),$$
$$(x-z)^N[Y(e^a,x),Y(e^b,z)]=0 \qquad (\langle a,b\rangle\equiv 2 \pmod 2 \text{ のとき}),$$
$$(x-z)^N\{Y(e^a,x)Y(e^b,z)+Y(e^b,z)Y(e^a,z)\}=0$$
$$(\langle a,b\rangle\equiv 1 \pmod 2 \text{ のとき})$$

が成立する．N は十分大きな自然数である． ∎

この 1 次元格子 L から構成された頂点作用素超代数 V_L の中に次の 2 つの直交する共形元が入っている．

$$\omega^1 = \frac{1}{4}x(-1)^2 + \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x}),$$

$$\omega^2 = \frac{1}{4}x(-1)^2 - \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x}).$$

前節でも同じようなものがあったが，係数が異なるのは今は $\langle x, x\rangle = 1$ であり，前節では $\langle x, x\rangle = 4$ であったからである．これら 2 つの共形元は真空 $1 = 1 \otimes e^0$ の上に $L\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ をそれぞれ生成し，その既約加群は，すでに何度も述べたように，同型を除いて 3 個しかない．$L\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ のウエイトは整数でウエイト空間の次元は小さい方から $1, 0, 1, 1, 2, \cdots$ となっており $L\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ のウエイトは半整数でウエイト空間の次元も同じように $1, 1, 1, 1, 2, \cdots$ となっている．$\left(L\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus L\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right) \otimes \left(L\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus L\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)$ に対応する数を計算してみるとウエイトは整数または半整数でウエイト空間の次元は $1, 2, 1, 2, 4, \cdots$ となっている．さらに V_L に対応する数を計算してみると $1, 2, 1, 2, 4, \cdots$ となっている．他の組み合わせを考えてみてもウエイト空間の次元が合わないので V_L が $V_{\omega^1} \otimes V_{\omega^2}$ 加群として，

$$\left(L\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus L\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right) \otimes \left(L\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus L\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)$$

に同型であることがわかる．θ を L 上で -1 の作用から誘導された V_L の自己同型とする．θ の固定空間 $(V_L)^\theta$ をとると，これも ω^1 と ω^2 を含む頂点作用素超代数となっている．$V_{\omega^1} \otimes V_{\omega^2}$ 加群としての分解はウエイト空間の次元から，

$$(V_L)^\theta \cong \left(L\left(\frac{1}{2}, 0\right) \otimes L\left(\frac{1}{2}, 0\right)\right) \oplus \left(L\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \otimes L\left(\frac{1}{2}, 0\right)\right)$$

となる．さらに，部分空間 M を

$$M = \{v \in (V_L)^\theta \mid (\omega^2)_1 v = 0\}$$

で定義すると，これはヴィラソロ元 ω^1 を持つ頂点作用素超代数であり，V_{ω^1} 加群として，$L\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus L\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ と同型である．

以上の結果をまとめると，

定理　$M^0 = L\left(\frac{1}{2}, 0\right), M^1 = L\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ のとき，$M = M^0 \oplus M^1$ は頂点作用素超代数の構造を持つ．このとき M の中心電荷は $\frac{1}{2}$ である．　∎

$M=L\left(\frac{1}{2},0\right)\oplus L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ が頂点作用素超代数としての構造を得たのである．交換関係を繰り返して述べれば，$v\in L\left(\frac{1}{2},0\right)=M^0$ であれば，$Y(v,z)$ は他の頂点作用素と局所可換であるが，$u,v\in L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=M^1$ のときは，$(z-w)^N Y(u,z)Y(v,w)=-(z-w)^N Y(v,w)Y(u,z)$ となり，超局所可換性が成立する．

M の n 個のテンソル積 $F=(M^0\oplus M^1)\otimes\cdots\otimes(M^0\oplus M^1)$ を考え，その元 $v=v^1\otimes\cdots\otimes v^n$（ただし v^i は F の定義のテンソル積の i 番目の $M=M^0\oplus M^1$ に属しているとする）に対して，頂点作用素 $Y(v,z)=Y(v^1\otimes\cdots\otimes v^n,z)=Y(v^1,z)\otimes\cdots\otimes Y(v^n,z)$ と定義し，それを F 全体に線形に拡張する．

長さ n の 2 元体コード語 $\alpha=(a_1,\cdots,a_n)$ に対して，F の部分空間を定義する．

$$F_\alpha=\langle v^1\otimes\cdots\otimes v^n\in\bigotimes_{i=1}^{n} M \mid v^i\in M^{a_i}\rangle_K$$

である．$v\in F_\alpha, u\in F_\beta$ に対して，上の局所超可換性より，

$$(z-w)^N Y(v,z)Y(u,w)=(-1)^{\langle\alpha,\beta\rangle}(z-w)^N Y(u,w)Y(v,z)$$

であることがわかる．

コード D に対して，

$$F_D=\bigoplus_{\delta\in D}F_\delta$$

と定義すると，D が線形コードであれば（頂点作用素）代数的に閉じたベクトル空間 F_D ができる．また，D は偶線形とすると，すべての頂点作用素 $Y(v,z)$ は $\langle\alpha,\alpha\rangle\equiv 0 \pmod 2$ であるから自分自身と局所可換である．

局所超可換性を消すために D の中心拡大を使う．すなわち，D を可換 2 群と考えて D の内積による -1 での中心拡大した群 $\widehat{D}=\{\pm\epsilon^\alpha:\alpha\in D\}$ を考える．$\epsilon^\alpha\epsilon^\beta=(-1)^{\langle\alpha,\beta\rangle}\epsilon^\beta\epsilon^\alpha$, $\epsilon^\alpha\epsilon^{-\alpha}=(-1)^{\langle\alpha,\alpha\rangle/2}\epsilon^0$ となっている積を入れるのである．D が偶でないとここでも困る．

$$M_D=\bigotimes_{\alpha\in D}(F_\alpha\otimes\epsilon^\alpha)$$

と定義し，頂点作用素を $v\in F_\alpha$ に対して

$$Y(v\otimes\epsilon^{\alpha},z)=Y(v,z)\otimes\epsilon^{\alpha}$$

と定義すると，中心拡大 $\widehat{D}$ の超可換性と頂点作用素 $Y(v,z)$ の局所超可換性が打ち消しあって，$Y(v\otimes\epsilon^{\alpha},z)$ の局所可換性が成り立つことがわかる．真空は M^0 の真空 $\mathbf{1}$ を使って $(\bigotimes_{i=1}^{n}\mathbf{1})\otimes\epsilon^0$ とする．この元も今後 $\mathbf{1}$ と書くことにする．M^0 のヴィラソロ元 ω^0 を使って

$$e^i=(\bigotimes_{j=1}^{i-1}\mathbf{1})\otimes\omega^0\otimes(\bigotimes_{j=i+1}^{n}\mathbf{1})\otimes\epsilon^0$$

とおくと，中心電荷 $\frac{1}{2}$ の有理型共形元であり，和 $\omega=e^1+\cdots+e^n$ は M_D のヴィラソロ元となる．以上で M_D が頂点作用素代数となっていることが証明できた．この頂点作用素代数のことを**コード頂点作用素代数**と呼ぶ．

定理　D を長さ n の 2 元体偶線形コードとするとき，

$$(M_D,Y,\omega,\mathbf{1})$$

は中心電荷 $\frac{n}{2}$ の頂点作用素代数である．▎

定理　頂点作用素代数 V が次の仮定 (a), (b) を満足するとするとき，$P=\langle\tau_{e^i}\,|\,i=1,\cdots,n\rangle$ とすれば固定空間 V^P はコード頂点作用素代数となる．

(a) $V=\coprod_{i=0}^{\infty}V_n$ は単純頂点作用素代数．

(b) V のヴィラソロ元 ω は互いに直交する中心電荷 $\frac{1}{2}$ の有理型共形元 $e^1,\cdots,e^n$ の和となっている．▎

一般の頂点作用素代数 V は，上の定理で述べた仮定の下では，コード頂点作用素代数 V^P の加群となる．よってコード頂点作用素代数の表現論が必要になってくる．それは，6.7，6.8 で述べる．

6.6　指標形式

一般に，次数つき空間

$$V=\coprod_{n\geqq 0}V_n$$

が与えられたとき，

$$\mathrm{ch}\,V=\sum_{n\geqq 0}\dim V_i z^i$$

を V の**指標形式**または単に指標と呼ぶ．$\dim V_i$ の母関数のことを指標形式と言っているのである．ムーンシャイン加群 $V^\natural$ の指標形式

$$\sum_{n\geqq 0}\dim V_n q^{n-1},\quad q=e^{2\pi i\tau},\quad \tau\in H$$

が古来有名な j 関数であった（定数部分を除いて）．以下 M_D の指標形式を計算しよう．

$$\psi_D(x,y)=s_nx^n+s_{n-1}x^{n-1}y+\cdots+s_1xy^{n-1}+s_0y^n$$

を D の**ウェイト多項式**（形式）（weight enumerator）とする．すなわち，係数 s_i は D の重さが i となる元の数である．$L\left(\frac{1}{2},0\right)$ と $L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ の指標形式は知られているがなかなか複雑なもの（少なくともそれが一般的な形で得られたときは*2)）である．z のベキは正にとると，$r,s\in\mathbb{N}$, $rs\neq 0$ のとき

$$\mathrm{ch}\,L\left(\frac{1}{2},0\right)=$$
$$\left[\prod_{i=1}^{\infty}(1-z^i)\right]^{-1}\sum_{\substack{r\equiv 0,3\ (\mathrm{mod}\ 4)\\ s\equiv 0,1\ (\mathrm{mod}\ 4)}}\left[(-1)^r z^{\frac{3r^2-r}{4}}+(-1)^s z^{\frac{3s^2+s}{4}}\right],$$

$$\mathrm{ch}\,L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=$$
$$\left[\prod_{i=1}^{\infty}(1-z^i)\right]^{-1}\sum_{\substack{r\equiv 1,2\ (\mathrm{mod}\ 4)\\ s\equiv 2,3\ (\mathrm{mod}\ 4)}}\left[(-1)^{r+1} z^{\frac{3r^2-r}{4}}+(-1)^{s+1} z^{\frac{3s^2+s}{4}}\right].$$

有名なヤコビの三重積公式の 1 つ

$$\prod_{n=0}^{\infty}\{(1-x^{2kn+k-l})(1-x^{2kn+k+l})(1-x^{2kn+2k})\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n x^{kn^2+ln}$$

を $x=z$, $k=\frac{3}{4}$, $l=\pm\frac{1}{4}$ として使う（モンスターが我々を古典の世界へと導いてくれる 1 つの例である）と簡略化でき

*2) Rocha-Caridi, A., Vacuum Vector Representations of the Virasoro Algebra; in Vertex Operators in Mathematics and Physics-Proceedings of a Conference Nov. 10-17, 1983, 451–473, Springer-Verlag, 1984.

$$\operatorname{ch} L\left(\frac{1}{2},0\right) \pm \operatorname{ch} L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \prod_{n\in\mathbb{N}+\frac{1}{2}} (1\pm z^n)$$

となる．それがわかると

$$\operatorname{ch} L\left(\frac{1}{2},0\right) = \frac{1}{2}\left(\prod_{n\in\mathbb{N}+\frac{1}{2}} (1+z^n) + \prod_{n\in\mathbb{N}+\frac{1}{2}} (1-z^n)\right),$$
$$\operatorname{ch} L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\prod_{n\in\mathbb{N}+\frac{1}{2}} (1+z^n) - \prod_{n\in\mathbb{N}+\frac{1}{2}} (1-z^n)\right)$$

が得られる．それゆえ M_D の指標は

$$\begin{aligned}
&\operatorname{ch}(M_D)\\
&\quad = \sum_{i=0}^{n} s_i \left(\operatorname{ch} L\left(\frac{1}{2},0\right)\right)^{n-i} \left(\operatorname{ch} L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right)^{i}\\
&\quad = \frac{1}{2^n}\psi_D \left(\prod_{n\in\mathbb{N}+\frac{1}{2}} (1+z^n) - \prod_{n\in\mathbb{N}+\frac{1}{2}} (1-z^n),\right.\\
&\qquad\qquad \left.\prod_{n\in\mathbb{N}+\frac{1}{2}} (1+z^n) + \prod_{n\in\mathbb{N}+\frac{1}{2}} (1-z^n)\right)
\end{aligned}$$

となる．同様に

$$\operatorname{ch} L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{16}\right) = z^{\frac{1}{16}} \prod_{0\neq n\in\mathbb{N}} (1+z^n)$$

も知られている．$\operatorname{ch} L\left(\frac{1}{2},h\right)$, $h\in\left\{0,\frac{1}{2},\frac{1}{16}\right\}$，に限れば，それらを別の方法で簡明に導くこともできる．

6.7　コード頂点作用素代数の加群

以下，M_D 加群の理論を簡単に記す．6.5 で述べたように，ムーンシャイン加群 $V^\natural$ のような頂点作用素代数 V ではそのヴィラソロ元 ω が n 個の互いに直交している中心電荷 $\frac{1}{2}$ の有理型共形元 e^i の和で書かれている．e^i から τ 型の自己同型 τ_{e^i} が生じそれら全体で生成された初等可換 2 群 P が $\operatorname{Aut}(V)$

の中に存在するのである．P の固定点全体である，部分頂点作用素代数 V^P がコード頂点作用素代数 M_D というものに同型になるのであった．V^P から V 全体を作っていけばよい．コード頂点作用素代数 M_D は有理型なので，V は既約 V^P 加群 W の直和になっている．どのような W が実際 V の直和因子として現われるかということに答えるためには，もちろん，コード D の性質がよくわかっていなくてはならない．$V^\natural$ の場合には，それを決めることができる．その情報から，$V^\natural$ の直和分解がわかる．

まず一般論を少し述べよう．コード頂点作用素代数 M_D はすでにできているものとする．W を既約 M_D 加群としよう．M_D は部分頂点作用素代数 $T\cong\bigotimes_{i=1}^{n}L\left(\frac{1}{2},0\right)$ を含む．T は有理型であるので W は T 加群として完全可約である．さて，X を W に含まれている既約 T 加群としよう．6.4 で述べたように既約な T 加群は

$$\bigotimes_{i=1}^{n}L\left(\frac{1}{2},h_i\right),\quad h_i=0,\frac{1}{2},\frac{1}{16}$$

という形をしている．$\eta=(h_1,\cdots,h_n)$ は各 h_i に対して $a_i\equiv 16h_i \bmod 16$, $a_i\in\{0,1\}$ と定義すると，2 元体コード語 $\tau(X)=(a_1,\cdots,a_n)$ を生ずる．W は既約であるので W は M_D 加群としては X で生成される．M_D は

$$\bigotimes_{i=1}^{n}L\left(\frac{1}{2},h_i\right),\quad h_i=0,\frac{1}{2}$$

という形の既約 T 加群のいくつかの直和となっている．

$$\bigotimes_{i=1}^{n}L\left(\frac{1}{2},h_i\right),\quad h_i=0,\frac{1}{2},\frac{1}{16}$$

と書ける加群の間のフュージョン規則を見れば（付録 3 定理 H）M_D の元を X に作用させてもその像の 2 元体コード語 $(a'_1,\cdots,a'_n)$ はやはり X に対応する $\tau(X)$ と同じである．すなわち M_D の元を X に作用させてその像を T 加群としてみると，$L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{16}\right)$ 成分の存在する i の位置は変わらない．変わるのは，$h_i=0,\frac{1}{2}$ となっている i の位置だけである．すなわち上で定義した 2 元体コード語 $\tau(X)=(a_1,\cdots,a_n)$ は既約 T 加群 X のとり方に依存しない．既約 M_D 加群 W に対してただ 1 つに定まったこの 2 元体コード語 $(a_1,\cdots,a_n)$

を $\tau(W)$ とおこう．ここで次の重要なことが成立することはすでに6.4で述べた．

定理　D と $\tau(W)$ は直交する．　▮

さて次に W の中にどのような既約 T 加群が入っているかを調べよう．そのために $\{X_i \mid i=1,\cdots,s\}$ を W の中に含まれている互いに同型でない既約 T 加群の全部の集合としよう．上で述べたように，$L\left(\frac{1}{2},h_i\right)$ 間のフュージョン規則により，$\tau(X_i)=\tau(W)$ となっている．W_i を W に含まれている既約 T 加群で X_i に同型なもの全部の和としよう．もちろん

$$W=\bigoplus_{i=1}^{s} W_i$$

が成立している．M_D は $\{W_1,\cdots,W_s\}$ の上に可移に働いている．2元体コード語 $\sigma\in D$ の各成分を半分にして $\bigotimes_{i=1}^{n} L\left(\frac{1}{2},h_i\right)$, $h_i=0,\ \frac{1}{2}$ と読みかえれば，D がフュージョン規則に従って $\{W_1,\cdots,W_s\}$ の上に可移に働いていると言ってもよい．M_D の中に含まれている既約 T 加群 $L=\otimes L\left(\frac{1}{2},h_i\right)$ に対して $\sigma(L)=(2h_1,\cdots,2h_n)$ と定義しよう．L は, $\sigma(L)$ の $2h_i=1$ となっている i の集合が，$\tau(W)=(16h_1,\cdots,16h_n)$ の $16h_i=1$ となっている i の集合の部分集合になっているとき（$\sigma(L)\subset\tau(W)$ と書く），すべての i に対して同型類 X_i を保つ．よって W_i を保つ．さて，$D(\tau(W))=\{\sigma\in D \mid \sigma\subset\tau(W)\}$ と定義する．再び $L\left(\frac{1}{2},h_i\right)$ 間のフュージョン規則により剰余コード $D/D(\tau(W))$ は集合 $\{W_1,\cdots,W_s\}$ の上に正則（固定点なし）に作用する．ゆえに，$s=|D/D(\tau(W)|$ が成立する．以上まとめると，次の定理になる．

定理　W を既約 M_D 加群とし，$\{X_1,\cdots,X_s\}$ を W に含まれる互いに同型でない既約 T 加群の全体の集合とし，W_i を X_i に同型な W の 既約 T 加群の和とする．このとき

$$W=\bigoplus_{i=1}^{s} W_i$$

ただし，$s=|D/D(\tau(W))|$ である．　▮

これで 既約 M_D 加群の大まかな構造はわかった．さらに各々の W_i の構造がわかれば，既約 M_D 加群の構造は完全にわかることになる．部分コード $D(\tau(W))$ は各 W_i に作用している．今までは ϵ^{α} の存在，すなわち M_D は

$\bigotimes_{i=1}^{n} L\left(\frac{1}{2}, h_i\right)$ でなく $\bigotimes_{i=1}^{n} L\left(\frac{1}{2}, h_i\right) \otimes \epsilon^{\alpha}$ というものから構成されているということは関係なかったが，M_D 加群 W に含まれる W_i の構造には，そのことが関係してくる．証明はしないが次の定理が成立する．

定理 W を既約 M_D 加群，X を W に含まれている既約 T 加群，W_X を W の含まれている既約 T 加群で X に同型なもの全体の和とする．このとき

$$W_X = \psi_X \otimes X$$

と書け，ψ_X は，2 群 $\widehat{D}(\tau(W))(\subset \widehat{D})$（$\widehat{D}$ は 6.5 で定義した）の既約表現で $\psi_X(-\epsilon^0) = -Id$ となるものである．特に，$\deg \psi_X$ は X の W_X における重複度である． ∎

$\widehat{D}(\tau(W))$ は可換群とエクストラスペシアル群の中心積である．このような構造をもった群の既約表現で $\psi_X(-\epsilon^0) = -Id$ となっているものの次数はただ 1 つに定まり，そして ψ_X は $\widehat{D}(\tau(W))$ の極大可換群の既約表現からの誘導表現であることも知られている．ゆえに，$\widehat{I}_W$ を $\widehat{D}(\tau(W))$ の極大可換群とすれば，$\deg(\psi_X) = [\widehat{D}(\tau(W)) : \widehat{I}_W]$ である．2 元体コードの言葉に言いかえると，I_W を $D(\tau(W))$ の極大自己直交部分コードとすれば $\deg(\psi_X) = [D(\tau(W)) : I_W]$ となる．また，$\deg(\psi_X) = \sqrt{[D(\tau(W)) : rad(D(\tau(W)))]}$ とも書ける．特に $D(\tau(W))$ が自己直交コードのときは $W_X \cong X$ であり，W のすべての既約 T 加群は重複度なしで現われる．

6.8 ムーンシャイン加群の構成とその指標形式

次にムーンシャイン加群 $V^{\natural}$ の構成を簡単に見てみよう．まず E_8 格子を用いて標準的な方法で作られた頂点作用素代数 V_{E_8} を考察する．V_{E_8} のヴィラソロ元は 16 個の互いに直交する中心電荷 $\frac{1}{2}$ の有理共形元 $\{e^1, \cdots, e^{16}\}$ の和で書かれている．

V_{E_8} に対応する初等可換群 $P = \langle \tau_{e^1}, \cdots, \tau_{e^{16}} \rangle$ と，σ 型のコード語からなる 2 次元線形コード D を作ると $|P| = 2^5$ で，D はリード・ミュラーコード $RM(4,2)$ と呼ばれるものになっているものが存在する．しかも，6.4 で述べ

たように，もう1つできていた τ 型のコード語からなる $S=\tau(V_{E_8},P)$ と D が直交することは一般に成立しているのであるが，V_{E_8} の場合は，さらに強く $S=D^{\perp}$ である．実はムーンシャイン加群 $V^{\natural}$ でも同じことが成立している．

3個の頂点作用素代数 V_{E_8} の直和 $V_{E_8}\oplus V_{E_8}\oplus V_{E_8}$ を適当に加工修正すると $V^{\natural}$ ができる．実際の行程はここでは述べないが $V_{E_8}\oplus V_{E_8}\oplus V_{E_8}$ のある部分頂点作用素代数の適当な誘導表現としてできる頂点作用素代数が求める $V^{\natural}$ となる．$V^{\natural}$ のヴィラソロ元は，48個の互いに直交する中心電荷 $\dfrac{1}{2}$ の有理型共形元 $\{e^1,\cdots,e^{48}\}$ の和で書かれている．

$V^{\natural}$ に対応する初等可換群 $P^{\natural}=\langle\tau_{e^1},\cdots,\tau_{e^{48}}\rangle$ は位数が 2^7 である．σ 型のコード語からなる線形コード $D^{\natural}$ と，既約 T 加群にどんなものがあるかを知るために，τ 型のコード語からできる線形コード $S^{\natural}$ を記述しよう．

まず S をリード・ミュラーコード $RM(4,1)$ とする．$RM(4,1)$ は $(16,5,8)$ コードである．ここで (a,b,c) コードとは長さ a，次元 b，それに含まれるコード語の最小の重さが c となっている2元体線形コードのことである．S は

$$\langle 1^{16},0^81^8,(0^41^4)^2,(0^21^2)^4,(01)^8\rangle$$

として生成されている．$S\subset S^{\perp}$ も成立していて，S のウエイト多項式は

$$x^{16}+30x^8y^8+y^{16}$$

である．$D=S^{\perp}$ とおけば D は $(16,11,4)$ コードとなる．

$$S^{\natural}=\{(\tau,\tau,\tau),(\bar{\tau},\tau,\tau),(\tau,\bar{\tau},\tau),(\tau,\tau,\bar{\tau})\,|\,\tau\in S\}$$

と $S^{\natural}$ を定義する．ここで，$\bar{\tau}+\tau=1^{16}$ で $\bar{\tau}$ は定義される．すなわち $\bar{\tau}$ は τ のサポートの補集合からできたコード語である．$S^{\natural}$ は自己直交 $(48,7,16)$ コードとなり，そのウェイト多項式は

$$x^{48}+3x^{32}y^{16}+120x^{24}y^{24}+3x^{16}y^{32}+y^{48}$$

である．さらに $D^{\natural}=(S^{\natural})^{\perp}$ と定義すれば $D^{\natural}$ は $(48,41,4)$ コードとなる．$S^{\natural}=rad(D^{\natural})$ となっているので，$D^{\natural}$ の極大自己直交コードはその位数が

$2^{\frac{41-7}{2}+7}=2^{24}$ である．ゆえにその指数は 2^{17} である．$2^{17}=\sqrt{[D^\natural : rad(D^\natural)]}$ とも書ける．一般に線形コードのラディカル（退化核）の位数がわかっていれば，極大自己直交コードの指数はわかる．次の補題は後で必要な元の個数を数え上げるのに便利である．

補題　2 元体コード (ρ_1, ρ_2, ρ_3) が $D^\natural$ の元であるための必要十分条件はすべての ρ_i が長さ 16 の偶コード語でしかも $\rho_1+\rho_2+\rho_3 \in D$ である．　∎

(τ, τ, τ) の形の $S^\natural$ の元との内積をとると $\rho_1+\rho_2+\rho_3 \in D$ を示すことができ，$(\bar{\tau}, \tau, \tau)$ の形の $S^\natural$ の元との内積をとると ρ_i が偶コードであることが言える．

さて，

$$V^\natural = \bigoplus_{\tau \in S^\natural} V^\tau$$

と定義され，$\tau = 0^{48}$ のとき $V^P = V^\tau \cong M_{D^\natural}$ である．それ以外の τ に対しての V^τ は前節で述べた方法によって構造が決められる．それぞれの τ に対しての V^τ の構造を以下調べる．その指標形式も記す．ただし次の事柄は既知とする．

$$q_+ = \prod_{n=0}^{\infty}(1+q^{n+\frac{1}{2}}), \quad q_- = \prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{n+\frac{1}{2}}), \quad q_0 = \prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n)$$

と定義すると

$$q_0 = q^{-\frac{1}{24}}\frac{\eta(2z)}{\eta(z)}, \quad q_+q_- = q^{\frac{1}{24}}\frac{\eta(z)}{\eta(2z)},$$
$$q_0q_+q_- = 1, \quad 16q^{\frac{1}{2}}q_0^8 = q_+^8 - q_-^8 \quad \text{(Jacobi)}.$$

指標形式

$$\mathrm{ch}\, L\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \frac{1}{2}(q_+ + q_-),$$
$$\mathrm{ch}\, L\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(q_+ - q_-),$$
$$\mathrm{ch}\, L\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{16}\right) = q^{\frac{1}{16}}q_0$$

は 6.6 で述べた．

（1）$\tau=0^{48}$．この場合は，$V^\tau=M_{D^\natural}$．$D^\natural(\tau)=\{0^{48}\}$ は明白であるから，$M_{D^\natural}$ は $|D^\natural|=2^{41}$ 個の互いに同型でない既約 T 加群の直和となる．重複度はない．指標形式は $D^\natural=(S^\natural)^\perp$ であるから，一般のコード C とその双対コード C^* のウェイト多項式 W_C,W_{C^*} の間の関係を与えるマクウィリアム（F. J. MacWilliams）の公式

$$W_{C^*}(x,y)=\frac{1}{|C|}W_C(x+y,x-y)$$

を使えばよい．$|S^\natural|=2^7$ と $\mathrm{ch}\,L\left(\frac{1}{2},0\right)+\mathrm{ch}\,L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=q_+$，$\mathrm{ch}\,L\left(\frac{1}{2},0\right)-\mathrm{ch}\,L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=q_-$ に注意して，

$$\mathrm{ch}\,V^\tau=\frac{1}{2^7}(q_+^{48}+3q_+^{32}q_-^{16}+120q_+^{24}q_-^{24}+3q_+^{16}q_-^{32}+q_-^{48})$$

を得る．上に既知の事柄としてあげた式，特に Jacobi の式を何度も使って，さらに変形すると

$$\mathrm{ch}\,V^\tau=2^{17}q^3q_0^{48}+3\cdot2^{10}q^2q_0^{24}+(q_+q_-)^{24}+24q$$

となる．

（2）$\tau=0^{32}1^{16}$．明らかに $D^\natural(\tau)\cong D$ だから $|D^\natural(\tau)|=|D|=2^{11}$ を得る．$D^\natural(\tau)$ に含まれる極大の自己直交コードの位数は 2^8 である．これは $rad(D)=S$ で $|S|=2^5$ であるから容易にわかる．$D^\natural$ はフュージョン規則を通して V^τ に作用する．その部分コード $D^\natural(\tau)$ が既約 T 加群の同型類を保つのであったから，V^τ にはちょうど $2^{41-11}=2^{30}$ 個の互いに同型でない既約 T 加群が含まれている．重複度は $2^3=2^{11-8}$ である．しかしこれだけでは V^τ の指標形式は算出できない．そこで

$$L(\tau)=\left\{\bigotimes_{i=1}^{48}L\left(\frac{1}{2},h_i\right)\,\middle|\,\tau(h_1,\cdots,h_{48})=\tau\right\}$$

と定義しよう．すでに述べたように $D^\natural$ はフュージョン規則を通して集合 $L(\tau)$ に作用するがその軌道の個数は容易に計算され，

$$\frac{2^{|\tau|}}{[D^\natural:D^\natural(\tau)]}$$

である．$\tau=0^{32}1^{16}$ の場合にはこの数は 4 となる．すなわち 4 個ある軌道の中から適当なものを選ばなければならない．しかし，$V^\natural$ が $\mathbb{Z}$ で次数が付けられていること，$V^\natural$ の重さ 1 の部分空間 $V_1^\natural$ が消えていることから軌道は

$$\bigotimes_{i=1}^{48} L\left(\frac{1}{2},h_i\right),\quad (h_1,\cdots,h_{48})=\left(0^{15},\frac{1}{2},0^{15},\frac{1}{2},\left(\frac{1}{16}\right)^{16}\right)$$

を含むものでなければならないことがわかる．これらの情報のもとに指標形式は

$$\operatorname{ch}V^\tau=2^3\left(\sum_{i=1}^{8}\binom{16}{2i-1}\operatorname{ch}L\left(\frac{1}{2},0\right)^{2i-1}\operatorname{ch}L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)^{17-2i}\right)^2 \cdot\operatorname{ch}L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{16}\right)^{16}$$

と計算され，それはさらに

$$\operatorname{ch}V^\tau=2^3\cdot\frac{1}{4}qq_0^{16}(q_+^{16}-q_-^{16})^2=2^3(2^{14}q^3q_0^{48}+2^8q^2q_0^{24})$$

と変形される．

（3）$\tau=0^{24}1^{24}$．24 は 16 の倍数ではないので，$D^\natural(\tau)$ は上の 2 つの場合と違ってコードの具体的な性質が必要になる．まず $H_8\oplus H_8\subset D$ であり，その指数は 2^3 となっている．ここで，H_8 は $(8,4,4)$ コードでハミング（R. W. Hamming）コードと呼ばれているものである．$H_8\oplus H_8\oplus H_8\subset D^\natural(\tau)$ は明らかであるが，$|D^\natural(\tau)|=|H_8|^3 2^6=2^{18}$ となっている．$H_8\oplus H_8\oplus H_8$ は $D^\natural(\tau)$ の極大自己直交部分コードであって，その位数は 2^{12} である．ゆえに，重複度は 2^6 である．この場合も

$$L(\tau)=\left\{\bigotimes_{i=1}^{48} L\left(\frac{1}{2},h_i\right)\,\middle|\,\tau(h_1,\cdots,h_{48})=\tau\right\}$$

の軌道を調べる必要がある．その軌道の個数は 2 である．すなわち 2 個ある軌道の中から適当なものを選ばなければならない．(2) のときのように，$V^\natural$ が $\mathbb{Z}$ で次数が付けられていることに注意すれば，求める軌道は

$$\bigotimes_{i=1}^{48} L\left(\frac{1}{2},h_i\right),\quad (h_1,\cdots,h_{48})=\left(0^{23},\frac{1}{2},\left(\frac{1}{16}\right)^{24}\right)$$

を含むものでなければならないことがわかる．これらの情報をもとに指標形式は

$$\operatorname{ch} V^\tau = 2^6\left(\sum_{i=1}^{12}\binom{24}{2i-1}\operatorname{ch} L\left(\frac{1}{2},0\right)^{2i-1}\operatorname{ch} L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)^{25-2i}\right)$$
$$\cdot\operatorname{ch} L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{16}\right)^{24}$$

と計算され，それはさらに

$$\operatorname{ch} V^\tau = 2^6\cdot\frac{1}{2}q^{\frac{3}{2}}q_0^{24}(q_+^{24}-q_-^{24}) = 2^6(2^{11}q^3q_0^{48}+3\cdot 2^3q^2q_0^{24})$$

と変形される．

（4）$\tau=0^{16}1^{32}$．$D^\natural(\tau)$ は σ,σ' がともに長さ 16 の偶コード語で $(0^{16},\sigma,\sigma')$，$\sigma+\sigma'\in D$ となる元の集合である．σ として任意の長さ 16 の偶コード語を選び，任意の D の元 σ'' に対して $\sigma'=\sigma+\sigma''$ とおけばよいので $D^\natural(\tau)$ の位数は $2^{15+11}=2^{26}$ である．$D^\natural(\tau)$ に含まれる極大自己直交コードの位数は 2^{16} と計算される．ゆえに重複度は 2^{10} である．$D^\natural$ の集合 $L(\tau)$ 上の作用の軌道の個数は 2 であり，$V^\natural$ が $\mathbb{Z}$ で次数が付けられていることから軌道は

$$\bigotimes_{i=1}^{48} L\left(\frac{1}{2},h_i\right),\quad (h_1,\cdots,h_{48}) = \left(0^{16},\left(\frac{1}{16}\right)^{32}\right)$$

を含む方をとらなければならない．指標形式は

$$\operatorname{ch} V^\tau = 2^{10}\left(\sum_{i=0}^{8}\binom{16}{2i}\operatorname{ch} L\left(\frac{1}{2},0\right)^{2i}\operatorname{ch} L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)^{16-2i}\right)$$
$$\cdot\operatorname{ch} L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{16}\right)^{32}$$

と計算され，それはさらに

$$\operatorname{ch} V^\tau = 2^{10}\cdot\frac{1}{2}q^2q_0^{32}(q_+^{16}+q_-^{16}) = 2^{10}(2^7q^3q_0^{48}+q^2q_0^{24})$$

と変形される．

（5）$\tau=1^{48}$．この場合はほとんどすべて自明である．$D^\natural(\tau)=D^\natural$．$rad(D^\natural)=S^\natural$ であるから，極大自己直交部分コードの指数は $2^{\frac{41-7}{2}}=2^{17}$．ゆえに，重複度は 2^{17} である．V^τ はただ 1 つの既約 T 加群の同型類 $\bigotimes_{i=1}^{48} L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{16}\right)$ を持つ．指標形式は

$$\mathrm{ch}\, V^{\tau} = 2^{17} q^3 q_0^{48}$$

である．

（1），（2），（3），（4），（5）の各タイプに属するコード語 τ の数は，それぞれ，1, 3, 120, 3, 1 個であるから $V^{\natural}$ の指標形式はそれらを全部足し合わせて

$$2^{24} q^3 q_0^{48} + 3 \cdot 2^{16} q^2 q_0^{24} + (q_+ q_-)^{24} + 24q$$

となる．この式を q で割って全式をデデキントのエータ関数で書くと

$$\begin{aligned} &2^{24} \frac{\eta(2z)^{48}}{\eta(z)^{48}} + 3 \cdot 2^{16} \frac{\eta(2z)^{24}}{\eta(z)^{24}} + \frac{\eta(z)^{24}}{\eta(2z)^{24}} + 24 \\ &= \left(2^8 \frac{\eta(2z)^{16}}{\eta(z)^{16}} + \frac{\eta(z)^8}{\eta(2z)^8} \right)^3 - 744 \\ &= \frac{1}{\eta(z)^{24}} \left(2^8 \frac{\eta(2z)^{16}}{\eta(z)^8} + \frac{\eta(z)^{16}}{\eta(2z)^8} \right)^3 - 744 \end{aligned}$$

と変形される．$\theta_{E_8}(z)$ を E_8 格子の θ 関数とすれば，

$$j(z) = \frac{\theta_{E_8}(z)^3}{\eta(z)^{24}}$$

であるから

$$\theta_{E_8}(z) = 2^8 \frac{\eta(2z)^{16}}{\eta(z)^8} + \frac{\eta(z)^{16}}{\eta(2z)^8}$$

を言えばよい．しかしこれは古典論でできる．E_8 格子から自然に構成される頂点作用素代数の指標形式を使っても証明できる．

演習問題を残したが，以上をまとめると

$$q^{-1} \mathrm{ch}\, V^{\natural} = q^{-1} \sum_{n \geqq 0} \dim V_n^{\natural} q^n = j(z) - 744, \quad q = e^{2\pi i z}$$

となり，これで望みのことが得られている．

宮本による新しい $V^{\natural}$ の構成を簡単に述べ，その指標形式を導出した．このように新しく構成された $V^{\natural}$ の自己同型群 $G = \mathrm{Aut}\,(V^{\natural})$ が有限群であることは 6.3 ですでに示した．G がモンスターに同型であることも証明できる．しかも，フレンケル・レパウスキー・マーモン*3)の証明法よりは著しく簡明で

*3) あとがきの中の文献［12］．

ある．しかし，新しい構成を使っての，G がモンスターであることの証明法はまだ改良の余地があるかもしれない．

また，この $V^\natural$ の構成

$$V^\natural = \bigoplus_{\tau \in S^\natural} V^\tau$$

を使ってマッカイ・トンプソン級数 $J_g(z) = \sum_{n \geqq 0} \mathrm{Tr}(g|_{V_n^\natural})q^{n-1}$ を計算することもいくつかの元 g についてなされている．

それらの計算も始まったばかりであるが，すべての元 g に対して $J_g(z)$ が計算可能であればおもしろい．ボーチャズによるコンウエイ・ノートン予想の肯定的解決からは $J_g(z)$ が種数 0 のモデュラー関数でなければならないということは出てこなかった．まったく新しい $V^\natural$ の構成がどこまで種数 0 の秘密を探ってくれるだろうか．その他いろいろな問題を新しい目で見ることが可能かもしれない．

第 7 章

物理学から群論へ

位数最大の散在型単純群モンスターが古典的な保型関数論と結び付いていることを第 4 章で述べた．コンウェイ・ノートン予想の証明に使われたムーンシャイン加群は頂点作用素代数であることを第 5 章で述べ，第 6 章では頂点作用素代数のその後の発展について少し述べた．頂点作用素は現代物理学の**弦（ひも）理論**にその原点をもっている．このモンスターと保型関数論，弦理論との結びつきは，本書の題名の通り，群が広がっていることを如実に物語っている．

頂点作用素代数は数学的に定義のできている数学対象であるから，もちろんそのまま研究することはできる．しかし，前章で重要であった頂点作用素代数 $L\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ には既約加群がただ 3 個だけ存在することなどは，物理学者が先に発見している．このことに限ると数学者は物理学者がすでに知っていたことに証明をつけたに過ぎない．モンスター，保型関数，頂点作用素代数の結びつきを重要と考えるなら頂点作用素にいたるまでの物理学の「初歩」を学ぶのは無駄ではなかろう．ここに書いたことはもちろん，物理学の本にもっと詳しく書いてあるが頂点作用素の発生の由来を手っ取り早く学びたいと思うとなかなか面倒なのである.「物理学から群論へ」と題したのは 21 世紀への希望を述べているのである．

7.1 シュレディンガー方程式

シュレディンガー（E. Schrödinger）**方程式**の発見過程を知るために次の関数を考えよう．x,t はそれぞれ空間，時間を表わす変数である．

$$\psi(x,t)=\sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-\nu t\right) \tag{7.1}$$

λ は波長であり，ν は波動数を表わす．

アインシュタイン（A. Einstein）の関係式

$$E=h\nu$$

で E はエネルギーを表わし，h はプランク（M. K. E. L. Plank）の定数である．また，ド・ブロイ（L. V. de Broglie）の関係式

$$\lambda=\frac{h}{p}$$

で p は運動量を示している．この 2 つの関係式を使うと（7.1）式は

$$\psi(x,t)=\sin\frac{px-Et}{\hbar} \tag{7.2}$$

となる（ただし，$\hbar=\dfrac{h}{2\pi}$）．

ニュートン力学で系のエネルギーは

$$E=\frac{1}{2}mv^2+V=\frac{p^2}{2m}+V \tag{7.3}$$

である．$V=V(t,x)$ は系のポテンシャルを表わす．ψ を両辺に掛けると

$$E\psi=\frac{p^2}{2m}\psi+V\psi. \tag{7.4}$$

t と x に関して，$\psi(x,t)$ を微分すると

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{E}{\hbar}\cos\frac{px-Et}{\hbar},$$
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=-\left(\frac{p}{\hbar}\right)^2\psi.$$

正弦と余弦の位相差を無視すれば，$\dfrac{\partial\psi}{\partial t}$ が $E\psi$ に，$\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$ が $p^2\psi$ に比例していることがわかる．物理量 E, p を関数 ψ への作用素 $\widehat{E}, \widehat{p}$ と考えれば

$$\widehat{E} \sim \frac{\partial}{\partial t}, \quad \widehat{p}^2 \sim \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

もう少し厳密に述べるために，正弦と余弦関数を同時に考慮しよう．

$$\psi(x,t) = \cos\frac{px-Et}{\hbar} + \gamma\sin\frac{px-Et}{\hbar},$$

γ は定数である．

これまでの考察は，定数 α, β, γ を適当に選べば以下の式が成り立つことを示唆する．

$$\beta\frac{\partial\psi}{\partial t} = \alpha\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V\psi. \tag{7.5}$$

実際，$\alpha = -\dfrac{\hbar^2}{2m}$，$\beta = i\hbar$，$\gamma = i$ とおけば，

$$\psi(x,t) = e^{\frac{i(px-Et)}{\hbar}}$$

であって，すべての関係式が矛盾なく成立していることがわかる．このようにして，有名なシュレディンガー方程式を得る：

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V\psi. \tag{7.6}$$

式(7.4)と(7.6)を比較すると，エネルギー E は $\psi(x,t)$ への作用素 $\widehat{E} = i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}$ に，運動量 p は $\widehat{p} = -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x}$ に，それぞれ対応している．E は作用素 $\widehat{E} = i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}$ の固有値で ψ はその固有関数である．また，p は作用素 $\widehat{p} = -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x}$ の固有値である．さらに，$\widehat{x}$ を $\widehat{x}\psi = x\psi$ によって定義された乗法作用素とすれば，

$$[\widehat{p}, \widehat{x}] = -i\hbar$$

すなわちハイゼンベルク (W. Heisenberg) の不確定原理を得る．運動量と座標を観測することは交換可能ではない．すなわち同時には観測できない．

原子内のポテンシャル $V(x,y,z)$ を具体的に与えてシュレディンガーは方程式(7.6)の解を求めた．そして E がある有限個の特別な値をとるときに限って式(7.6)に解が存在することを発見した．エネルギーの量子化が理論的に初めて世に出たのである．

7.2 最小作用の原理

ニュートン力学の**ラグランジュ**(J. L. Lagrange)**関数**は $V(x,t)$ をポテンシャルとして，次の式で表わされる．

$$L=\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-V(x,t). \tag{7.7}$$

質点の運動方程式を**最小作用の原理**によって導こう．

作用は

$$S=\int_{t_1}^{t_2}L(x,\dot{x},t)dt \tag{7.8}$$

L はラグランジュ関数で(7.7)の形をとらなくてもよい．$\dot{x}$ は t に関する x の微分を表わす．最小作用の原理は，運動方程式が「 S が停留値をとる」，すなわち

$$\frac{\delta S}{\delta x}=0$$

によって決まるという原理である．

無限小の量 δx により曲線の方程式 $x(t)$ を変化させる．すなわち $x\to x+\delta x$ とする($\delta x(t_1)=\delta x(t_2)=0$ は仮定する)．この変分で作用そのものが変化する．

$$\begin{aligned}
\delta S&=S(x+\delta x)-S(x)\\
&=\int_{t1}^{t_2}L(x+\delta x,\,\dot{x}+\delta\dot{x},t)dt-\int_{t1}^{t_2}L(x,\dot{x},t)dt\\
&=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\frac{\partial L}{\partial x}\delta x+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta\dot{x}\right\}dt\\
&=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\frac{\partial L}{\partial x}\delta x+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\frac{d}{dt}\delta x\right\}dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial x}\delta x - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\delta x + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta x\right) \right\} dt \\
&= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta x \Bigg|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) \right\} \delta x dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) \right\} \delta x dt
\end{aligned}
$$

曲線方程式 $x(t)$ の任意の無限小の変分 δx に対して $\dfrac{\delta S}{\delta x}=0$ が成立するためには

$$
\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0
$$

が成立する必要がある．これを**オイラーの微分方程式**と言う．ラグランジュ関数を具体的に上に述べた形(7.7)（V が x のみの関数として）にしてみると，そのときは

$$
\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{dV}{dx}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}
$$

なので，

$$
m\ddot{x} = F, \quad F = -\frac{dV}{dx}
$$

を得る．これはニュートンの運動方程式である．

ニュートン力学に限らず量子力学的弦の運動方程式も最小作用の原理によって求められる．

7.3 相対論的弦

頂点作用素代数は今のところ，通常，ユークリッド空間内で議論するのであるが，d 次元**ミンコフスキイ**（H. Minkowski）**空間**内の弦を扱うことから始める．まず，$\mathbb{R}^d = \{(x^0, x^1, \cdots, x^{d-1})\}$ を d 次元実ユークリッド空間とし，$\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ を $\mathbb{R}^d$ のベクトルとする．$\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ によって張られた平行四辺形の面積を A とすれば，

$$
A = \|v_1\|\|v_2\| \sin\theta = \sqrt{\langle v_1, v_1\rangle\langle v_2, v_2\rangle - \langle v_1, v_2\rangle^2}
$$

である.

次に，d 次元ミンコフスキイ空間 M_d を定義しよう．空間自体は $\mathbb{R}^d$ と同じで

$$M^d = \{(x^0, x^1, \cdots, x^{d-1});\ x^i \in \mathbb{R}\}$$

であるが 2 つのベクトル

$$x = (x^0, x^1, \cdots, x^{d-1}), \quad y = (y^0, y^1, \cdots, y^{d-1})$$

の内積は

$$\langle x, y\rangle = -x^0 y^0 + x^1 y^1 + \cdots + x^{d-1} y^{d-1}$$

と定義する.

M^d におけるベクトル v_1, v_2 によって張られた「平行四辺形」の面積は次のように定義する.

$$A = A(v_1, v_2) = \sqrt{\langle v_1, v_2\rangle^2 - \langle v_1, v_1\rangle\langle v_2, v_2\rangle}$$

平方根の中の量は，一般には負のこともある．例えば，$v_1 = (0,1,0,0)$, $v_2 = (0,0,1,0)$ としてみよ.

M^d の中を動く弦について考えてみよう.

$$\boldsymbol{x}(\sigma, \tau) = (x^0(\sigma, \tau), x^1(\sigma, \tau), \cdots, x^{d-1}(\sigma, \tau)) = x^\mu(\sigma, \tau)$$

は弦の M^d 内での座標で，σ は弦の長さ方向の座標，τ は時間座標とする．$x^\mu(\sigma, \tau)$ のようにベクトルやテンソルを，必要に応じて，その 1 つの成分で表わしてしまうのは物理学者の常法である．弦が M_d の中を動くときある面を描く．その面の無限小面積 ΔA 求めよう.

$$\partial_\sigma \boldsymbol{x} = \left(\frac{\partial x^0}{\partial \sigma}, \frac{\partial x^1}{\partial \sigma}, \cdots, \frac{\partial x^{d-1}}{\partial \sigma}\right)$$

$$\partial_\tau \boldsymbol{x} = \left(\frac{\partial x^0}{\partial \tau}, \frac{\partial x^1}{\partial \tau}, \cdots, \frac{\partial x^{d-1}}{\partial \tau}\right)$$

を σ, τ に関する弦の座標の導関数とする．ここで

$$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial \alpha}, \quad \alpha \in \{\sigma, \tau\}$$

という記号も使った．すると

$$\Delta A = \sqrt{\langle \partial_\sigma \boldsymbol{x}, \partial_\tau \boldsymbol{x} \rangle^2 - \langle \partial_\sigma \boldsymbol{x}, \partial_\sigma \boldsymbol{x} \rangle \langle \partial_\tau \boldsymbol{x}, \partial_\tau \boldsymbol{x} \rangle}\, d\sigma d\tau$$

となる．平方根の中の量が負にならないことを確かめよう．$x_0 = c\tau$ ととると（c は光の速度），

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(\sigma,\tau) &= (c\tau, x^1(\sigma,\tau), \cdots, x^{d-1}(\sigma,\tau)) \\ \partial_\tau \boldsymbol{x} &= \left(c,\ \frac{\partial x^1}{\partial \tau}, \cdots,\ \frac{\partial x^{d-1}}{\partial \tau} \right) \\ &= (c, \boldsymbol{v}) \end{aligned}$$

となる．$\boldsymbol{v}$ は弦の空間的速度を表わす．物体の速度は光速以下なので，

$$\langle \partial_\tau \boldsymbol{x}, \partial_\tau \boldsymbol{x} \rangle \leqq 0$$

となる．

σ に関する導関数については，次の式となり，

$$\partial_\sigma \boldsymbol{x} = \left(0, \frac{\partial x^1}{\partial \sigma}, \cdots, \frac{\partial x^{d-1}}{\partial \sigma} \right),$$

また

$$\langle \partial_\sigma \boldsymbol{x}, \partial_\sigma \boldsymbol{x} \rangle \geqq 0$$

は明らかだから，

$$\langle \partial_\sigma \boldsymbol{x}, \partial_\tau \boldsymbol{x} \rangle^2 - \langle \partial_\sigma \boldsymbol{x}, \partial_\sigma \boldsymbol{x} \rangle \langle \partial_\tau \boldsymbol{x}, \partial_\tau \boldsymbol{x} \rangle \geqq 0$$

が得られる．

7.4 弦の運動方程式

弦の作用は,

$$S=\int \varDelta A=\int \sqrt{\langle \partial_\sigma \boldsymbol{x}, \partial_\tau \boldsymbol{x}\rangle^2-\langle \partial_\sigma \boldsymbol{x}, \partial_\sigma \boldsymbol{x}\rangle\langle \partial_\tau \boldsymbol{x}, \partial_\tau \boldsymbol{x}\rangle}\, d\sigma d\tau \tag{7.9}$$

である．すなわち，弦が運動するときに描く面のミンコフスキイ空間 M^d の中での面積である．しかし，次の作用の方が扱いやすい．$x_0=-x^0, x_i=x^i, i\neq 0$ と添数が下に付いたベクトルを定義する．既知であろうが同じ添数が上下にあるときはそれに関する和をとる．

$$S=\int \sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta}\partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x_\mu d\sigma d\tau, \quad \mu=0,1,\cdots,d-1, \tag{7.10}$$

$\{\alpha,\beta\}=\{\sigma,\tau\}$ で g は

$$(g_{\alpha\beta})=(g_{\alpha\beta}(\sigma,\tau))=\begin{pmatrix} g_{\tau\tau} & g_{\tau\sigma} \\ g_{\sigma\tau} & g_{\sigma\sigma}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} \\ g_{10} & g_{11}\end{pmatrix}$$

であり

$$g_{\sigma\tau}=g_{\tau\sigma}, \quad g=\det(g_{\alpha\beta})<0$$

と仮定する．$g_{\alpha\beta}$ は弦が自ら作り出す計量と思えばよい．$g^{\alpha\beta}$ の定義は

$$(g^{\alpha\beta})=(g_{\alpha\beta})^{-1}.$$

d 次元時空 M_d の中を自由に動く弦の運動方程式を導くため作用（7.10）の変分を考える．まず，$g_{\alpha\beta}\to g_{\alpha\beta}+\delta g_{\alpha\beta}$ と変わるときの g と $g^{\alpha\beta}$ の変分に関する式を集める．

$$\delta g=\delta(\det(g_{\alpha\beta}))=gg^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta},$$
$$\delta g^{\alpha'\beta'}=-g^{\alpha'\alpha}g^{\beta'\beta}\delta g_{\alpha\beta},$$
$$\delta g_{\alpha'\beta'}=-g_{\alpha'\alpha}g_{\beta'\beta}\delta g^{\alpha\beta}.$$

第3式は $\delta g^{\alpha\beta}$ がはじめに与えられたときの $g_{\alpha'\beta'}$ の変分である．

(α,β) を一対選び，

$$g^{\alpha\beta}\to g^{\alpha\beta}+\delta g^{\alpha\beta}$$

とし，他は

$$\delta g^{\alpha'\beta'}=0$$

とする．すると，S の変分 δS は，

$$\delta S=\int d\sigma d\tau[\delta(\sqrt{-g}\,)g^{\gamma\delta}+\sqrt{-g}\,\delta g^{\gamma\delta}]\partial_\gamma x^\mu\partial_\delta x_\mu,\quad \{\gamma,\delta\}=\{\sigma,\tau\}$$

となる．

$$\delta g=gg^{\alpha'\beta'}\delta g_{\alpha'\beta'}$$

と書き，$\delta g^{\alpha'\beta'}=0$, $(\alpha',\beta')\neq(\alpha,\beta)$，であったから

$$\delta(\sqrt{-g}\,)=\frac{1}{2\sqrt{-g}}\delta(-g)=\frac{-1}{2}\sqrt{-g}\,g^{\alpha'\beta'}g_{\alpha'\alpha}g_{\beta'\beta}\delta g^{\alpha\beta}$$

という変分が得られ，それを使うと

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\alpha\beta}}=0\Longrightarrow\frac{1}{2}g^{\alpha'\beta'}g_{\alpha'\alpha}g_{\beta'\beta}g^{\gamma\delta}\partial_\gamma x^\mu\partial_\delta x_\mu-\partial_\alpha x^\mu\partial_\beta x_\mu=0$$

が得られ，さらに

$$g^{\alpha'\beta'}g_{\alpha'\alpha}g_{\beta'\beta}=g_{\alpha'\alpha}\delta_{\alpha'\beta}=g_{\beta\alpha}=g_{\alpha\beta}$$

に注意して

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\alpha\beta}}=0\Longrightarrow\partial_\alpha x^\mu\partial_\beta x_\mu-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}\partial_\gamma x^\mu\partial_\delta x_\mu=0$$

を得る．

$$g^{\gamma\delta}g_{\gamma\delta}=g^{\gamma\delta}g_{\delta\gamma}=\delta^\gamma_\gamma=2$$

なので，$g_{\gamma\delta}$ を

$$g_{\gamma\delta}=\partial_\gamma x^\mu\partial_\delta x_\mu \tag{7.11}$$

と選べば $\dfrac{\delta S}{\delta g^{\alpha\beta}}=0$ を満足している．ゆえに，弦が運動するときは(7. 11)が成立しているとする．(7. 11)を代入すると作用(7. 10)は作用(7. 9)に帰着する．

次に，作用(7. 10)はパラメーター σ, τ に関する任意の局所変換で不変であることを示す．

$$\tau \to \tau+\delta\tau, \quad \sigma \to \sigma+\delta\sigma$$

それに伴う x^{μ} の変分を

$$\delta x^{\mu}=\varepsilon^{\tau}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial \tau}+\varepsilon^{\sigma}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial \sigma}$$

と書く．そこで計量 $g^{\mu\nu}$ が次の式に従って，変化するとする．

$$\delta g^{\alpha\beta}=\varepsilon^{\tau}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial \tau}+\varepsilon^{\sigma}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial \sigma}-\frac{\partial \varepsilon^{\alpha}}{\partial \tau}g^{\tau\beta}-\frac{\partial \varepsilon^{\alpha}}{\partial \sigma}g^{\sigma\beta}-\frac{\partial \varepsilon^{\beta}}{\partial \tau}g^{\alpha\tau}-\frac{\partial \varepsilon^{\beta}}{\partial \sigma}g^{\alpha\sigma} \tag{7. 12}$$

またその結果

$$\delta(\sqrt{-g})=\frac{\partial}{\partial \tau}(\varepsilon^{\tau}\sqrt{-g})+\frac{\partial}{\partial \sigma}(\varepsilon^{\sigma}\sqrt{-g})$$

となる．$\delta\tau, \delta\sigma$ を任意の(局所)微小変換とするとき，$\delta g^{\alpha\beta}$ を(7. 12)のようにして与えれば $\delta S=0$ となる．これを S の局所変換不変性という．

通常，パラメーター σ, τ が関数 σ', τ' に大局的に変換する場合は，新しい計量テンソル g' は距離を変えない $ds^2=ds'^2$ という要請によって決まる．他方，局所パラメーター(再)変換の場合，新しい関数 σ', τ' の形は局所的にすら与えない．それゆえ，計量テンソル g の変分を支配する法則はない．(7. 12)は，通常の要請 $ds^2=ds'^2$ から導かれたのではないので，長さを計る尺度 ds はもはや不変ではない．ゲージ変換と言われるゆえんである．任意の局所解析変換に限ると長さは変わるが角度は変わらない．それは共形変換といわれる．

作用 S には (σ, τ) に関する任意の局所変換不変性があるので，計量テンソル $g_{\alpha\beta}$ の自由度を 2 個減らすことができ

$$(g_{\alpha\beta})=\rho(\sigma,\tau)\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

と選ぶことができる．数学的に考えられるすべての計量テンソル $g_{\alpha\beta}$ が (σ,τ) の再パラメーター化によって，上に述べた形に変換されることを言っているのではない．むしろ，すべての物理的な計量テンソルは自明で平坦な計量に由来すると考えているのである．ともあれ，作用の最終的な形は，

$$S=-\int\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial\tau}\frac{\partial x_\mu}{\partial\tau}-\frac{\partial x^\mu}{\partial\sigma}\frac{\partial x_\mu}{\partial\sigma}\right)d\tau d\sigma$$

となる．

次に μ を 1 つ固定してそれに関する曲線座標 x^μ の変分を考える．

$$x'^\mu=\frac{\partial x^\mu}{\partial\sigma},\quad \dot{x}^\mu=\frac{\partial x^\mu}{\partial\tau}$$

とおくと，各々の変分は

$$x^\mu\to x^\mu+\delta x^\mu,\quad x'^\mu\to x'^\mu+\delta x'^\mu,\quad \dot{x}^\mu\to\dot{x}^\mu+\delta\dot{x}^\mu$$

となる．ここで，$x', \dot{x}$ などはそれぞれ σ,τ に関する微分である．

$$\begin{aligned}\delta S&=-2\int[\delta\dot{x}\cdot\dot{x}-\delta x'\cdot x']d\sigma d\tau\\&=-2\int_0^\pi\int_{-\infty}^\infty\left[\frac{\partial}{\partial\tau}(\delta x\cdot\dot{x})-\delta x\cdot\ddot{x}-\frac{\partial}{\partial\sigma}(\delta x\cdot x')+\delta x\cdot x''\right]d\sigma d\tau\end{aligned}$$

弦は時間的には $\tau=-\infty$ から $\tau=\infty$ まで動き，弦の端点は $\sigma=0,\pi$ で与えられているとする．$\delta\dot{x}\cdot\dot{x}$ などは M^d における内積である．この変分を考えるに際して，次の条件をおく．

$$\delta x(\sigma,-\infty)=\delta x(\sigma,\infty)=0.$$

これは 7.2 で述べた変分条件 $\delta x(t_1)=\delta x(t_2)=0$ に対応している．開いた弦（$\boldsymbol{x}(0,\tau)\neq\boldsymbol{x}(\pi,\tau)$）の場合は，

$$x'(\pi,\tau)=0,\quad x'(0,\tau)=0$$

も仮定する．これは，端点での弦の運動量が常に 0 となることを意味している．これらの条件，仮定のもとに

$$\delta S = -2\int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty [-\ddot{x} + x''] \delta x d\sigma d\tau$$

となり，任意の μ について，次の式が得られる．

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} - \frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}\right) x^\mu = 0.$$

これで弦の運動方程式が求まったわけだが，計量テンソル $g_{\alpha\beta}$ の変分から導かれた拘束条件

$$g_{\alpha\beta} = \partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x_\mu$$

をとり込む必要が残っている．

$$(g_{\alpha\beta}) \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と選んだのだから

$$\partial_\tau x^\mu \partial_\sigma x_\mu = 0$$
$$\partial_\tau x^\mu \partial_\tau x_\mu + \partial_\sigma x^\mu \partial_\sigma x_\mu = 0$$

が得られる．

以上をまとめると，弦の運動方程式は次のようになる．

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2}{\partial\tau^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial\sigma^2}\right) x^\mu = 0, \quad \mu = 0, 1, \cdots, d-1 \\ \partial_\tau x^\mu \partial_\sigma x_\mu = 0 \\ \partial_\tau x^\mu \partial_\tau x_\mu + \partial_\sigma x^\mu \partial_\sigma x_\mu = 0 \end{cases}$$

一番上の方程式を解けば，開いた弦の運動方程式は

$$x^\mu(\sigma, \tau) = q^\mu + p^\mu \tau + \sum_{n\in\mathbb{Z}}{}' \frac{i}{n} a_n^\mu e^{-in\tau} \cos n\sigma$$

閉じた弦に対する方程式は

$$x^\mu(\sigma, \tau) = q^\mu + p^\mu \tau + \sum_{n\in\mathbb{Z}}{}' \frac{i}{2n} a_n^\mu e^{-2in(\tau-\sigma)} + \sum_{n\in\mathbb{Z}}{}' \frac{i}{2n} \tilde{a}_n^\mu e^{-2in(\tau+\sigma)}$$

となる．量 a_n^μ，$\tilde{a}_n^\mu$ は，一般に複素数であるが

$$x^\mu(\sigma,\tau)\in\mathbb{R} \Longrightarrow \overline{a}_n^\mu = a_{-n}^\mu, \overline{\widetilde{a}}_n^\mu = \widetilde{a}_{-n}^\mu$$

が得られる．

拘束条件 $\dot{x}\cdot x'=0$, $\dot{x}^2+x'^2=0$ はまだ考慮されていない．開いた弦の場合にそれを計算すると

$$L_m = \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{m-n}\cdot a_n = 0, \quad p_0 = a_0$$

が得られる．ここで $a_n=(a_n^0, a_n^1, \cdots, a_n^{d-1})$ で $a_{m-n}\cdot a_n$ は M_d の中での内積である．

物理的に受け入れ可能な弦に対しては任意の $m\in\mathbb{Z}$ に対して $L_m=0$ が成立する．しかし，L_m を作用素 $\widehat{L}(m)$ とみると

$$\left[\widehat{L}(m), \widehat{L}(n)\right] = (m-n)\widehat{L}(m+n) + \frac{1}{12}d(m^3-m)\delta_{m+n,0}$$

が成立し，すべての $\widehat{L}(m)$ を 0 作用素にはできなくなる．次の章で a_n^μ を作用素として見たときの交換関係を与えるがそれを使えば上の関係式は導出できる．これが有名な**ヴィラソロ**（M. A. Virasoro）**代数**である．

7.5 量子化，フォック空間

$A(p_i,q_j)$, $B(p_i,q_j)$ を $\{p_i,q_j\}$ の関数とするとき，**ポワソン**（S. D. Poisson）**括弧** $\{A,B\}_{PB}$ を

$$\sum_i\left(\frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial q_i} - \frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i}\right)$$

と定義する．ポワソン括弧 $\{A,B\}_{PB}=X$ を $[\widehat{A},\widehat{B}]=-i\hbar\widehat{X}$ と対応する作用素の関係に変えることを**量子化**という．関数 A に対応する $\widehat{A}$ は，波動関数や量子状態によって作られるベクトル空間（ヒルベルト（D. Hilbert）空間）上の作用素を表わす．基本的なポワソン括弧 $\{p_i,q_i\}_{PB}=1$ は量子力学的には $[\widehat{p}_i,\widehat{q}_i]=-i\hbar$ に対応する．このことに関しては，すでに 7.1 で運動量 p が運動量作用素 $\widehat{p}=-i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x}$ となり，$\widehat{x}$ を x による乗法作用素とすると，$[\widehat{p},\widehat{x}]=-i\hbar$ が成立することを見た．そこでは x が空間座標だったがここでは q_i が一般座標で，p_i が対応する一般運動量（共役）である．

弦理論においては，ラグランジュ関数は，

$$L=\frac{1}{2\pi}(\dot{x}^{\mu}\dot{x}_{\mu}-x'^{\mu}x'_{\mu})$$

であり，x^{μ} の共役は，

$$\pi_{\mu}=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\mu}}=\frac{1}{\pi}\dot{x}_{\mu}$$

となる．

$$[\widehat{p},\widehat{x}]=-i\hbar$$

に呼応して交換関係を

$$[\widehat{\pi}^{\mu}(\sigma',\tau),\widehat{x}^{\nu}(\sigma,\tau)]=-i\delta(\sigma'-\sigma)\eta^{\mu\nu}$$

と定め，さらに

$$[\widehat{\pi}^{\mu}(\sigma',\tau),\widehat{\pi}^{\nu}(\sigma,\tau)]=[\widehat{x}^{\mu}(\sigma',\tau),\widehat{x}^{\nu}(\sigma,\tau)]=0$$

と定める．$\hbar=1$ と単位をとってある．$\delta(\sigma)$ はデルタ関数であり，$(\eta_{\mu\nu})=(\eta^{\mu\nu})$ は対角行列でその成分は $(-1,1,1,\cdots,1)$ である．そうすれば，空間座標に対しては $[\widehat{p},\widehat{x}]=-i\hbar$ が対応している．上の式は超関数として理解する：

$$\begin{aligned}\int[\widehat{\pi}^{\mu}(\sigma',\tau),\widehat{x}^{\nu}(\sigma,\tau)]f(\sigma',\tau)d\sigma'&=-\int i\delta(\sigma'-\sigma)\eta^{\mu\nu}f(\sigma',\tau)d\sigma'\\&=-if(\sigma,\tau)\eta^{\mu\nu}.\end{aligned}$$

デルタ関数のフーリエ（J. B. J. Fourier）展開式

$$\begin{aligned}\delta(\sigma'-\sigma)&=\frac{1}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{2in(\sigma'-\sigma)}\\&=\frac{1}{\pi}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}(\cos n\sigma')(\cos n\sigma)\right)\end{aligned}$$

と弦の方程式

$$x^{\mu}(\sigma,\tau)=q^{\mu}+p^{\mu}\tau+{\sum_{n\in\mathbb{Z}}}'\frac{i}{n}a_n^{\mu}e^{-in\tau}\cos n\sigma$$

$$x^{\mu}(\sigma,\tau)=q^{\mu}+p^{\mu}\tau+{\sum_{n\in\mathbb{Z}}}'\frac{i}{2n}a_n^{\mu}e^{-2in(\tau-\sigma)}+{\sum_{n\in\mathbb{Z}}}'\frac{i}{2n}\tilde{a}_n^{\mu}e^{-2in(\tau+\sigma)}$$

の物理量をハットのついたものに置き換えると

$$[\widehat{a}_m^\mu, \widehat{a}_n^\nu] = [\widehat{\tilde{a}}_m^\mu, \widehat{\tilde{a}}_n^\nu] = m\eta^{\mu\nu}\delta_{m+n,0}, \quad [\widehat{p}^\mu, \widehat{q}^\nu] = -i\eta^{\mu\nu}$$

が得られる．

$\widehat{a}_n^\mu$, $\widehat{\tilde{a}}_n^\mu$ が調和振動子と呼ばれるものである．それらはどのような空間で作用するのだろうか．今後ハット符号は省略する．物理量はほとんどすべて作用素と思ってよいからである．また開いた弦のみを考えることにする．それゆえ，調和振動子としては a_n^μ だけである．また，$a_0^\mu = p^\mu$ である．

天下り的に**フォック**(Fock)**空間** $\mathfrak{F}$ を定義する．

$$\mathfrak{F} = \left\langle a_{-n_1}^{\mu_1} a_{-n_2}^{\mu_2} \cdots a_{-n_k}^{\mu_k} |\boldsymbol{p}\rangle \right\rangle_{\mathbb{C}}$$

すなわち $\langle\ ,\ \rangle$ の中の元の集合 $B = \{a_{-n_1}^{\mu_1} a_{-n_2}^{\mu_2} \cdots a_{-n_k}^{\mu_k} |\boldsymbol{p}\rangle\}$ を基底にもつ $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間である．n_j はすべて正整数である．$\boldsymbol{p}$ は運動量の成す空間の上を動く．

基底の元 $|\boldsymbol{p}\rangle$ への a_n^μ の作用は $n>0$ のとき $a_n^\mu|\boldsymbol{p}\rangle = 0$ であり，$a_0^\mu|\boldsymbol{p}\rangle = p^\mu|\boldsymbol{p}\rangle$ とする．ここで $\boldsymbol{p} = (p^0, p^1, \cdots, p^{d-1})$ である．$a_0^\mu = p^\mu$ の p^μ は作用素であり，$a_0^\mu|\boldsymbol{p}\rangle = p^\mu|\boldsymbol{p}\rangle$ の p^μ は数である．

要するに $\mathfrak{F}$ は集合 $\{a_n^\mu | 0 \leqq \mu \leqq d-1, n \in \mathbb{Z}\}$ から生成されたリー代数の展開環の最高ウェイト表現の直和である．$|\boldsymbol{p}\rangle$ が最高ウェイトベクトルとなっている．$\mathfrak{h}$ を $\{a_0^0, a_0^1, \cdots, a_0^{d-1}\}$ で張られた可換リー代数とし，それからアフィンリー代数を作って，その最高ウェイト表現の直和を考えても同じものができる．フォック空間 $\mathfrak{F}$ が格子 L から作られた頂点作用素代数 V_L に似ているのがわかるであろう．

$n>0$ のとき a_n^μ は**消滅作用素**と呼ばれ，$n<0$ の場合は**生成作用素**と呼ばれる．次のような性質をもつエルミート内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を $\mathfrak{F}$ 上で定義することができる．

$$\langle |\boldsymbol{p}\rangle, |\boldsymbol{p}'\rangle \rangle = \delta_{\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}'}$$

$$\langle a_n^\mu |\phi\rangle, |\psi\rangle \rangle = \langle |\phi\rangle, a_{-n}^\mu |\psi\rangle \rangle, \quad |\phi\rangle, |\psi\rangle \in \mathfrak{F}$$

エルミート内積は量子間の存在確率，遷移確率として説明される．例えば，

$i\neq 0$ の場合 $[a^i_n, a^i_{-n}]=n\eta^{ii}\delta_{0,0}=n$ を使えば，次の式が得られる．

$$\langle a^i_{-n}\,|0\rangle\,, a^i_{-n}\,|0\rangle\rangle=\langle|0\rangle\,, a^i_n a^i_{-n}\,|0\rangle\rangle=\langle|0\rangle\,, n+a^i_{-n}a^i_n\,|0\rangle\rangle=\langle|0\rangle\,, n\,|0\rangle\rangle=n$$

他方，$[a^0_m, a^0_{-m}]=m\eta^{00}\delta_{0,0}=-m$ であるため，$\langle a^0_{-m}\,|0\rangle\,, a^0_{-m}\,|0\rangle\rangle=-m$ で，エルミート内積は m が正ならば負となる．ゆえに，$a^0_{-m}|0\rangle$ の存在確率は負である．そのような量子状態は**ゴースト**と呼ばれる．もちろん，ゴーストのない理論を作ることが望ましい．$m>n>0$ として次の計算を行う．

$$\begin{aligned}
L_n a^0_{-m}\,|0\rangle &= -\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{n-k}\cdot a_k a^0_{-m}\,|0\rangle \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} a^0_{n-k}a^0_k a^0_{-m}\,|0\rangle \\
&= -\frac{1}{2}a^0_{n-m}a^0_m a^0_{-m}\,|0\rangle-\frac{1}{2}a^0_{n-m}a^0_m a^0_{-m}\,|0\rangle
\end{aligned}$$

第 1 項は，$k=m$ から生じ，第 2 項は，$k=n-m$ から生ずる．計算を続けて

$$L_n a^0_{-m}\,|0\rangle=-a^0_{n-m}(a^0_{-m}a^0_m-m)\,|0\rangle=ma^0_{n-m}\,|0\rangle\neq 0$$

となる．このような元 $a^0_{-m}|0\rangle$ は物理的に受け入れられないと決めよう．もう少し丁寧に説明すると

$$\mathfrak{P}=\{|\phi\rangle\in\mathfrak{F}\,|\,L(n)\,|\phi\rangle=0,\ \forall n\in\mathbb{Z}_+\}$$

とおいて $\mathfrak{P}$ を**物理的状態の空間**と呼ぶ．上で述べた元 $a^0_{-m}|0\rangle$ は $\mathfrak{P}$ に属していない．$d=26$ のときには，$\mathfrak{P}$ にはゴーストが含まれていないことが証明されている．5. 3 で物理的空間にふれたが，ボーチャズはその証明方法を使ってコンウェイ・ノートン予想の肯定的解決に成功するのである．

7. 6 頂点作用素

ここからはユークリッド計量 $(g_{ij})=(\delta_{ij})=(1,1,\cdots,1)$ のみを使う．これは，相対論的弦理論の光錐量子化において横断的座標だけを考察するとそうなる．ボーチャズによるコンウェイ・ノートン予想の証明には $26=2+24$ 次元の頂

点代数が使われた．2 次元は光錐量子化における軸方向の座標を表わし 24 は横断面座標を表わす．ただし，本書では光錐量子化という概念には触れなかったので単純に D 次元のユークリッド空間 $\mathbb{R}^D$ を考えればよい．今後は x^μ などの μ という添数はやめて x^i を使う．ここで $i=1,2,\cdots,D$ である．

7.1 でシュレディンガー方程式について述べた：

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+V\psi.$$

その過程でエネルギー E と作用素 $\widehat{E}=i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}$，運動量 p と作用素 $\widehat{p}=-i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x}$ とがそれぞれ対応することもわかった．次にこれらの作用素を関数のテーラー展開と結びつける．

$$\begin{aligned}f(x+a)&=f(x)+af'(x)+\frac{a^2}{2!}f''(x)+\cdots+\frac{a^n}{n!}f^{(n)}(x)+\cdots\\&=\exp\left(a\frac{d}{dx}\right)f(x)\end{aligned}$$

なので，

$$\exp\left(a\frac{d}{dx}\right)f(x)=\exp\left(\frac{i}{\hbar}a\widehat{p}\right)f(x)=f(x+a)$$

と書くことができる．

次に，p を運動量として

$$\psi(x)=C\int\phi(p)e^{\frac{i}{\hbar}px}dp$$
$$\phi(p)=C\int\psi(x)e^{-\frac{i}{\hbar}px}dx$$

を，波動関数 $\psi(x)$ のフーリエ変換とその逆変換としよう．ここで C はある適当な定数である．関数 $\psi(x)$ を知ることと関数 $\phi(p)$ を知ることは同値である．$\phi(p)$ は波動関数の**運動量表示**と呼ばれる．運動量表示 $\phi(p)$ を使うと $\widehat{p}$ は p を掛ける作用素となり，一方，

$$\widehat{x}=i\hbar\frac{\partial}{\partial p}$$

となる．それは次の計算からわかる．

$$
\begin{aligned}
x\psi(x) &= C\int x\phi(p)e^{\frac{i}{\hbar}px}dp \\
&= -i\hbar Ce^{\frac{i}{\hbar}px}\phi(p)\Big|_{-\infty}^{\infty} + i\hbar C\int \frac{\partial}{\partial p}\phi(p)e^{\frac{i}{\hbar}px}dp \\
&= i\hbar C\int \frac{\partial}{\partial p}\phi(p)e^{\frac{i}{\hbar}px}dp
\end{aligned}
$$

上の計算は，$\psi(x)\longleftrightarrow\phi(p)$ という対応は，$x\psi(x)\longleftrightarrow i\hbar\dfrac{\partial}{\partial p}\phi(p)$ という対応であることを意味している．運動量表示 $\phi(p)$ を使うと頂点作用素代数との関係がよく見えるようになる．関数 ϕ を

$$
|\phi\rangle = \sum_p \phi(p)\,|p\rangle
$$

と書く．$|p\rangle$ を単位ベクトルと思い，それに関数 ϕ の p における価を係数として（無限次元）のベクトルを形式的に作ったのである．これはケットベクトル表示であるがヒルベルト空間の元として厳密に定義できる．このケットベクトルの表記法を使えば，

$$
\exp\left(\frac{i}{\hbar}a\widehat{x}\right)|p\rangle = |p+a\rangle
$$

となる．これは，

$$
\begin{aligned}
\exp\left(\frac{i}{\hbar}a\widehat{x}\right) : \sum_p \phi(p)\,|p\rangle &\to \sum_p \phi(p-a)\,|p\rangle \\
&= \sum_p \phi(p)\,|p+a\rangle
\end{aligned}
$$

だからである．

もし，$\boldsymbol{p}$ が D 次元のベクトルであるような一般的な状況を考えれば，次の式が得られる:

$$
e^{-\frac{i}{\hbar}\widehat{\boldsymbol{a}}\cdot\widehat{\boldsymbol{x}}}f(\boldsymbol{p}) = f(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{a}), \quad e^{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{a}\cdot\widehat{\boldsymbol{x}}}\,|\boldsymbol{b}\rangle = |\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\rangle .
$$

ここで

$$
\widehat{x} = \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial p^1}, i\hbar\frac{\partial}{\partial p^2}, \cdots, i\hbar\frac{\partial}{\partial p^d}\right)
$$

である．

我々の考えているものを少しずつ頂点作用素に近づけよう．7.4 で得られた（開いた）弦の運動方程式は

$$x^i(\sigma,\tau)=q^i+p^i\tau+\sum_{n\in\mathbb{Z}}{}'\frac{i}{n}a_n^i e^{-in\tau}\cos n\sigma$$

であった．

τ を虚数時間 $\tau=-ti, t\in\mathbb{R}$ で置き換える．$\tau+\sigma=-it+\sigma=-i(t+i\sigma)$ に注意して $z=e^{t+i\sigma}$ を変数とする関数

$$x^i(z)=\frac{1}{2}q^i-i\frac{1}{2}p^i\log z+\frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}{}'\frac{i}{n}a_n^i z^{-n}$$

を導入すれば

$$x^i(\sigma,\tau)=x^i(z)+x^i(\bar{z})$$

となる．ここで $\bar{z}$ は複素共役である．$x^i(z)$ は正則部分，$x^i(\bar{z})$ は反正則部分と呼ばれる．

頂点作用素の構成には正則部分 $x^i(z)$ のみ考慮する．$\hbar=1$ とおくと，

$$e^{i\boldsymbol{a}\cdot\widehat{\boldsymbol{x}}}|\boldsymbol{b}\rangle=|\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\rangle$$

であった．弦理論において対応するものは（2 倍するが）

$$e^{2i\boldsymbol{k}\cdot\widehat{\boldsymbol{x}}(z)}=e^{i\boldsymbol{k}\cdot\widehat{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{k}\cdot\widehat{\boldsymbol{p}}\log z-\sum\frac{\boldsymbol{k}\cdot\widehat{\boldsymbol{a}}_n}{n}z^{-n}}$$

となる．ハット記号をここでは付けた．これはフォック空間 $\mathfrak{F}$ 上で作用するものと考えられる．この表記には，未定義作用素もあり，また調和振動子が可換でないためそれらに対しての定義づけが完全ではない．

上記のことを考慮して

$$Y(\boldsymbol{k},z)=\exp\left(-\sum_{n<0}\frac{\boldsymbol{k}\cdot\widehat{\boldsymbol{a}}_n}{n}z^{-n}\right)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\widehat{\boldsymbol{q}}}z^{\boldsymbol{k}\cdot\widehat{\boldsymbol{p}}}\exp\left(-\sum_{n>0}\frac{\boldsymbol{k}\cdot\widehat{\boldsymbol{a}}_n}{n}z^{-n}\right)$$

とおき，これを**頂点作用素**と呼ぶ．

ここで第 5 章で定義した頂点作用素を思い出してみよう．それは

$$Y(\alpha,z)=\exp\left(-\sum_{n<0}\frac{\alpha(n)}{n}z^{-n}\right)e^{\alpha}z^{\alpha}\exp\left(-\sum_{n>0}\frac{\alpha(n)}{n}z^{-n}\right)$$

であった．この 2 つの定義が以下示すように同値であることがわかる．まず，次の式を使って，リー交換子を比べてみる．

$$\left[\widehat{a}^i_m, \widehat{a}^j_n\right] = m\delta^{ij}\delta_{m+n,0}$$

から

$$\begin{aligned}\left[\boldsymbol{k}\cdot\widehat{a}_m, \boldsymbol{k}'\cdot\widehat{a}_n\right] &= \left[\sum k^i\widehat{a}^i_m, \sum k^j\widehat{a}^j_n\right] \\ &= m\langle\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}'\rangle\delta_{m+n,0} \\ &= \left[\boldsymbol{k}(m), \boldsymbol{k}'(n)\right]\end{aligned}$$

となる．最後の等式は $\boldsymbol{k}$ の作る D 次元ベクトル空間を可換リー代数とみて，それから作られるアフィンリー代数におけるリー交換子と同じである．ゆえに，対応は，

$$\boldsymbol{k}\cdot\widehat{a}_n \longleftrightarrow \boldsymbol{k}(n) \longleftrightarrow \boldsymbol{k}\otimes t^n$$

である．頂点作用素 $Y(\alpha, z)$ の α もベクトルであり

$$\alpha(n) \longleftrightarrow \alpha\otimes t^n$$

であったからこれらの対応はよい．

次に $e^{i\boldsymbol{k}\cdot\widehat{\boldsymbol{q}}}$ と $z^{\boldsymbol{k}\cdot\widehat{\boldsymbol{p}}}$ の作用の定義をする．

$$e^{i\boldsymbol{k}\cdot\widehat{\boldsymbol{q}}}\,|\boldsymbol{p}\rangle = |\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k}\rangle$$

と定義すると，これは先に得た

$$e^{i\boldsymbol{a}\cdot\widehat{\boldsymbol{x}}}\,|\boldsymbol{b}\rangle = |\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\rangle$$

に対応している．$\boldsymbol{x}$ は空間座標であり，$\boldsymbol{q}$ は弦の重心の座標と言われる量である．また，次の式が成立している．

$$z^{\boldsymbol{k}\cdot\widehat{\boldsymbol{p}}}\,|\boldsymbol{r}\rangle = z^{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\,|\boldsymbol{r}\rangle.$$

なぜならば $|\boldsymbol{r}\rangle$ は運動量作用素 $\widehat{\boldsymbol{p}} = \widehat{\boldsymbol{a}}_0$ の固有状態であり，

$$\boldsymbol{k}\cdot\widehat{\boldsymbol{p}}\,|\boldsymbol{r}\rangle=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}\,|\boldsymbol{r}\rangle$$

により

$$\begin{aligned} z^{\boldsymbol{k}\cdot\widehat{\boldsymbol{p}}}\,|\boldsymbol{r}\rangle &= e^{\boldsymbol{k}\cdot\widehat{\boldsymbol{p}}\log z}\,|\boldsymbol{r}\rangle \\ &= e^{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}\log z}\,|\boldsymbol{r}\rangle \\ &= z^{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\,|\boldsymbol{r}\rangle \end{aligned}$$

と求める式が得られる．

第5章の頂点作用素 $Y(\alpha,z)$ で対応している作用素は，

$$e^{\alpha}\cdot e^{\beta}=e^{\alpha+\beta} \quad \text{と} \quad z^{\alpha}\cdot e^{\beta}=z^{\langle\alpha,\beta\rangle}e^{\beta}$$

である．ゆえに対応

$$\begin{aligned} &|\boldsymbol{r}\rangle \longleftrightarrow e^{\beta}, \quad \boldsymbol{r}=\beta, \\ &e^{i\boldsymbol{k}\cdot\widehat{\boldsymbol{q}}} \longleftrightarrow e^{\alpha}, \quad \boldsymbol{k}=\alpha, \\ &z^{\boldsymbol{k}\cdot\widehat{\boldsymbol{p}}} \longleftrightarrow z^{\alpha}, \quad \boldsymbol{k}=\alpha \end{aligned}$$

により $Y(\boldsymbol{k},z)$ と $Y(\alpha,z)$ は完全に同値となる．

また，ヴィラソロ作用素も次のように定義する．

$$\begin{aligned} L(m) &= \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \boldsymbol{a}_n\cdot\boldsymbol{a}_{m-n}, \quad m\neq 0 \text{ のとき} \\ L(0) &= \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \boldsymbol{a}_{-|n|}\cdot\boldsymbol{a}_{|n|} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{a}_n=(a_n^1,a_n^2,\cdots,a_n^D)$ で各成分 a_n^i は作用素である．ここで調和振動子間の関係式

$$[a_m^i,a_n^j]=m\delta^{ij}\delta_{m+n,0}$$

を使って，

$$[L(m),L(n)]=(m-n)L(m+n)+\frac{1}{12}(m^3-m)D\delta_{m+n,0}$$

と計算できる．

7.7　作用素積展開

前節で頂点作用素とヴィラソロ作用素の定義を行ったが，この節ではそれらの間の交換関係について考察する．前節で交換関係

$$[L(m), L(n)] = (m-n)L(m+n) + \frac{1}{12}(m^3-m)D\delta_{m+n,0}$$

が成立すると述べた．しかし，調和振動子間の関係を使っての直接的な証明は面倒なものである．作用素積展開の考え方を使うとヴィラソロ代数の交換関係が道筋よく出てくる．共形場理論に関する文献を見れば作用素積展開の一般論が展開してある．しかし群論をする者にとってそういう本を始めから読むのは不必要であろう．

$$x^i(z) = \frac{1}{2}q^i - i\frac{1}{2}p^i \log z + \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}{}' \frac{i}{n} a_n^i z^{-n}$$

は，開いた弦の方程式の正則部分から導かれた．z で微分して

$$\partial_z x^i(z) = -\frac{i}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n^i z^{-n-1}, \quad p^i = a_0^i.$$

係数はすべて作用素で，交換関係

$$[a_m^i, a_n^j] = m\delta^{ij}\delta_{m+n,0}, \quad [p^i, q^j] = -i\delta^{ij}, \quad [a_m^i, q^j] = 0 \quad (m \neq 0)$$

が成立している．積

$$\sum_{i=1}^{D} \partial_z x^i(z)\partial_z x^i(z')$$

はこのままでは定義されていない．しかし，正規積

$$\sum_{i=1}^{D} :\partial_z x^i(z)\partial_z x^i(z):$$

は 定義されている．正規積を再び定義すると

定義

$$:a_n^i a_m^j: = \begin{cases} a_n^i a_m^j, & m \geqq n \quad \text{のとき} \\ a_m^j a_n^i, & n > m \quad \text{のとき.} \end{cases}$$

次に,

$$T(z) = -2\sum_{i=1}^{D} :\partial_z x^i(z)\partial_z x^i(z): \\ = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{D} z^{-2}: \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m^i z^{-m}\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n^i z^{-n}\right):$$

と定義する．$T(z)$ は**エネルギー運動量テンソル**と呼ばれているものである．$T(z)$ の z 展開を考えて

$$T(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L(n) z^{-n-2}$$

と書くと $L(n)$ は

$$L(n) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{c_0} dz\, z^{n+1} T(z) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} :a_{n-k}\cdot a_k:$$

である．c_0 は原点 $z=0$ の周りの円である．この表式は 7.6 の最後に与えたものと同じである．$n\neq 0$ のときは，$[a_{n-k}^i, a_k^j]=0$ なので $L(n)$ 対して正規積をとる必要はない．

ヴィラソロ作用素の交換関係を作用素積展開から導くことができるが，もう少し準備が必要である．

動径順序積（time ordered product, radial ordered product）と呼ばれているものは次のように定義される．

$$\mathfrak{R}A(z)B(z') = \begin{cases} A(z)B(z'), & |z|>|z'| \quad \text{のとき} \\ B(z')A(z), & |z|<|z'| \quad \text{のとき} \end{cases}$$

前節で虚数時間を導入した．そこで $z=e^{t+i\sigma}$ とおいたが，ここでもそれを使っている．$|z|>|z'|$ は $t>t'$ を意味する．すなわち，その仮定のもとでは作用素 $B(z')$ の方が $A(z)$ よりも時間的に早く起こる事象である．理に添わない作用素積展開は考えないというのが動径順序積である．さらに

$$\langle A(z)B(z')\rangle = \langle |0\rangle, \mathfrak{R}A(z)B(z')\,|0\rangle\rangle$$

と定義する．ここで $\langle\ ,\ \rangle$ は 7.5 で述べたエルミート内積である．$\langle A(z)B(z')\rangle$ は $A(z)$ と $B(z')$ の**相関関数**（**真空期待値**）と呼ばれる．$|0\rangle$ は真空である．$|z|>|z'|$ のとき $B(z')$ が真空に作用し，それから $A(z)$ が作用して真空が新

しい量子状態に変化する．元の量子状態である真空が，新しい量子状態にどのくらい残っているかを計る量が相関関数である．

例えば

$$\left\langle \partial_z x^i(z) \partial_{z'} x^j(z') \right\rangle = \frac{-\delta_{ij}}{4(z-z')^2}$$

と計算できる．$z=z'$ が特異点になっている．この場合は $|z|>|z'|$ のときも $|z|<|z'|$ のときも相関関数は同じであるが，一般には異なる．例えば $|z|>|z'|$ のとき

$$\left\langle x^i(z) \partial_{z'} x^j(z') \right\rangle = \frac{\delta_{ij}}{4(z-z')}$$

となり z と z' について対称ではない．なお，この下の式を z で微分すれば上の式が得られる．

次の定理は**ヴィック**（G. C. Wick）**の定理** と呼ばれている．

$$\mathfrak{R} A(z)B(z') = \langle A(z)B(z') \rangle + :A(z)B(z'):$$

例えば，$|z|>|z'|$ と仮定する．すると，

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{R} x^i(z)\partial_{z'}x^j(z') - :x^i(z)\partial_{z'}x^j(z'): \\
&\quad = x^i(z)\partial_{z'}x^j(z') - :x^i(z)\partial_{z'}x^j(z'): \\
&\quad = -\frac{i}{4z'}\left[\left(q^i - ip^i \log z + {\sum}' \frac{i}{n} a_n^i z^{-n}\right)(p^j + {\sum}' a_m^j z'^{-m})\right. \\
&\qquad \left. - :\left(q^i - ip^i \log z + {\sum}' \frac{i}{n} a_n^i z^{-n}\right)(p^j + {\sum}' a_m^j z'^{-m}):\right] \\
&\quad = -\frac{i}{4z'} \sum_{n>0, m<0} \frac{i}{n} [a_n^i, a_m^j] z^{-n} z'^{-m} \\
&\quad = -\frac{i}{4z'} \sum_{n>0} \delta_{ij} \frac{i}{n} n z^{-n} z'^{n} \\
&\quad = \frac{1}{4} \delta_{ij} \frac{1}{z-z'} \\
&\quad = \left\langle x^i(z)\partial_{z'}x^j(z') \right\rangle
\end{aligned}$$

ゆえに

$$\mathfrak{R} x^i(z)\partial_{z'}x^j(z') = \left\langle x^i(z)\partial_{z'}x^j(z') \right\rangle + :x^i(z)\partial_{z'}x^j(z'):$$

となる．このようにして，動径順序積の特異項を相関関数として正則部分から分けることができる．この処置を**作用素積展開**と呼ぶ．動径順序積は常に次のように表現できる．

$$\mathfrak{R}A(z)B(z') = \sum_{n \geqq -k} (z-z')^n \mathfrak{O}_n$$

ここで作用素 $\mathfrak{O}_n$ は $z \to z'$ のときフォック空間上の作用素として特異項を持っていない．ヴィラソロ代数の交換関係式を直接調和振動子から計算するのは面倒と言ったが，作用素積展開による方法はその面倒な部分をヴィックの定理に任せてしまっているのである．

まず，$\mathfrak{R}T(z)T(z')$ の展開を導く必要がある．ヴィックの定理を使うと，

$$\begin{aligned}
\mathfrak{R}T(w)T(z) &= 4\sum_{i,j=1}^{D} \mathfrak{R}:\partial_w x^i(w)\partial_w x^i(w)::\partial_z x^j(z)\partial_z x^j(z): \\
&= 4\sum_{i,j=1}^{D} :\partial_w x^i(w)\partial_w x^i(w)\partial_z x^j(z)\partial_z x^j(z): \\
&\quad +4\sum_{i,j=1}^{D} 4\left\langle \partial_w x^i(w)\partial_z x^j(z)\right\rangle :\partial_w x^i(w)\partial_z x^j(z): \\
&\quad +4\sum_{i,j=1}^{D} 2\left\langle \partial_w x^i(w)\partial_z x^j(z)\right\rangle^2
\end{aligned}$$

が得られる．係数 $4=(-2)^2$ の意味は自明であろう．その他の 4 とか 2 は組み合わせの可能性を数え上げているのである．第 2 番目の等号の第 1 項は正則なので無視しよう．関係式

$$\left\langle \partial_w x^i(w)\partial_z x^j(z)\right\rangle = \frac{-\delta_{ij}}{4(w-z)^2}$$

により $i=j$ としてよい．さらに

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{D} :\partial_w x^i(w)\partial_z x^i(z): \\
&\quad = \sum_{i=1}^{D} :(\partial_z x^i(z) + (w-z)\partial_z^2 x^i(z) + \cdots)\partial_z x^i(z): \\
&\quad = -\frac{1}{2}T(z) - \frac{1}{4}(w-z)\partial_z T(z) + (w-z)^2\mathfrak{O}(z)
\end{aligned}$$

を使うと，

$$\mathfrak{R}T(w)T(z) \equiv \frac{D}{2(w-z)^4} + \frac{2T(z)}{(w-z)^2} + \frac{\partial_z T(z)}{w-z}$$

が得られる．ここで記号「≡」は正則な項を無視する記号である．正則な項を法として考えていると言ってもよい．

作用素積展開は種々の型の交換関係を計算するのに役に立つ．当初の課題であった交換関係 $[L(m), L(n)]$ を求めよう．

$$T(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L(n) z^{-n-2}, \quad L(n) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{c_0} dz\, z^{n+1} T(z)$$

を使うと，円 c_0 はどんな半径も持ち得るので，

$$\begin{aligned}&[L(m), T(z)]\\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{c_1} dw w^{n+1} T(w)T(z) - \frac{1}{2\pi i}\oint_{c_2} dw w^{n+1} T(z)T(w)\end{aligned}$$

と書くことができる．ここで，z は固定してあり，c_1 は $|z|$ より大きい半径を持つ原点の周りの円で，c_2 は $|z|$ より小さい半径を持つ円である．ここに現われるすべての関数は $w=z$, $w=0,\infty$ でのみ特異点を持ち得るので，2 つの線積分を 1 つの線積分に置き換えることができることに注意しよう．すなわち，c_z を z を中心とする小さい円とすれば次の式が成立する．

$$[L(m), T(z)] = \frac{1}{2\pi i}\oint_{c_z} dw\, w^{m+1} \mathfrak{R}T(z)T(w).$$

ゆえに

$$\begin{aligned}[L(m), T(z)] &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{c_z} dw\, w^{m+1}\left(\frac{D}{2(w-z)^4} + \frac{2T(z)}{(w-z)^2} + \frac{\partial_z T(z)}{w-z}\right)\\ &= \frac{D}{12} m\left(m^2-1\right) z^{m-2} + 2T(z)(m+1)z^m + z^{m+1}\partial_z T(z)\end{aligned}$$

が成立する．上の式では，

$$w^{m+1} = z^{m+1} + (m+1)z^m(w-z) + \frac{1}{2}(m+1)m z^{m-1}(w-z)^2 + \cdots$$

を使った．これで $[L(m), L(n)]$ が計算できる．

$$
\begin{aligned}
&[L(m), L(n)]\\
&=\left[L(m), \frac{1}{2\pi i}\oint_{c_0} dz z^{n+1} T(z)\right]\\
&=\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_0} dz z^{n+1}[L(m), T(z)]\\
&=\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_0} dz z^{n+1}\left(\frac{D}{12}m(m^2-1)z^{m-2}+2T(z)(m+1)z^m+z^{m+1}\partial_z T(z)\right)\\
&=\frac{D}{12}m(m^2-1)\delta_{m+n,0}+(2m+2)L(m+n)+\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_0} dz z^{m+n+2}\partial_z T(z)
\end{aligned}
$$

最後の積分は部分積分によって得られる.

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_0} dz z^{m+n+2}\partial_z T(z)\\
&\quad=\frac{1}{2\pi i}\left[z^{m+n+2}T(z)\right]_{z=z_0}^{z=z_0}-\frac{m+n+2}{2\pi i}\oint_{c_0} dz z^{m+n+1}T(z)\\
&\quad=-(m+n+2)L(m+n)
\end{aligned}
$$

以上まとめると,

$$
[L(m), L(n)]=(m-n)L(m+n)+\frac{D}{12}(m^3-m)\delta_{m+n,0}
$$

となる.

次にもう少し複雑な, $[L(m), Y(\boldsymbol{k}, z)]$ を計算してみよう. $Y(\boldsymbol{k}, z)$ は前節で定義した頂点作用素 $e^{2i\boldsymbol{k}\cdot\widehat{\boldsymbol{x}}(z)}$ である.

$[L(m), L(n)]$ の場合のように, $\mathfrak{R}T(w)Y(\boldsymbol{k}, z)$ を使って, $[L(m), Y(\boldsymbol{k}, z)]$ を計算する. まず, $\mathfrak{R}\partial_w x^i(w)Y(\boldsymbol{k}, z)$ を求めよう. 一般に,

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{R}A(w):\exp B(z):&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathfrak{R}A(w):B(z)^n:\\
&\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}n\langle A(w)B(z)\rangle:B(z)^{n-1}:\\
&=\langle A(w)B(z)\rangle:\exp B(z):
\end{aligned}
$$

が成立し, また,

$$
\left\langle \partial_w x^i(w)x^j(z)\right\rangle=\frac{-\delta_{ij}}{4(w-z)}
$$

より

$$\mathfrak{R}\partial_w x^i(w)x^j(z)\equiv\frac{-\delta_{ij}}{4(w-z)}$$

が得られるので，

$$\mathfrak{R}\partial_w x^i(w)(2i\boldsymbol{k}\cdot\widehat{\boldsymbol{x}}(z))\equiv\langle\mathfrak{R}\partial_w x^i(w)(2i\boldsymbol{k}\cdot\widehat{\boldsymbol{x}}(z))\rangle=\frac{-ik_i}{2(w-z)}$$

が得られる．ここで $\boldsymbol{k}=(k_1,k_2,\cdots,k_D)$ である．

次に $\mathfrak{R}T(w)Y(\boldsymbol{k},z)$ の計算を行う．一般に

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}:A(w)A(w)::\exp B(z):&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathfrak{R}:A(w)A(w)::B(z)^n:\\&\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}2n\,\langle A(w)B(z)\rangle:A(w)B(z)^{n-1}:\\&\quad+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}n(n-1)\,\langle A(w)B(z)\rangle^2:B(z)^{n-2}:\\&=2\,\langle A(w)B(z)\rangle:A(w)\exp B(z):\\&\quad+\langle A(w)B(z)\rangle^2:\exp B(z):\end{aligned}$$

となり，ここで $A(w)$ を $\partial_w x^i(w)$ で，そして，$B(z)$ を $2i\boldsymbol{k}\cdot\widehat{\boldsymbol{x}}(z)$ で置き換えると，

$$\mathfrak{R}T(w)Y(\boldsymbol{k},z)\equiv\sum_{i=1}^{D}\frac{2ik_i}{w-z}:\partial_w x^i(w)Y(\boldsymbol{k},z):+\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}}{2(w-z)^2}Y(\boldsymbol{k},z)$$

が得られる．

次の計算も容易である．

$$\begin{aligned}&[L(m),Y(\boldsymbol{k},z)]\\&\quad=\oint_{c_z}dw w^{m+1}\mathfrak{R}T(w)Y(\boldsymbol{k},z)\\&\quad=\oint_{c_z}dw w^{m+1}\sum_{i=1}^{D}\frac{2ik_i}{w-z}:\partial_w x^i(w)Y(\boldsymbol{k},z):\\&\qquad+\oint_{c_z}dw w^{m+1}\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}}{2(w-z)^2}Y(\boldsymbol{k},z)\\&\quad=\sum_{i=1}^{D}2ik_i:\partial_z x^i(z)z^{m+1}Y(\boldsymbol{k},z):+\frac{(m+1)\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}}{2}z^mY(\boldsymbol{k},z)\end{aligned}$$

ここで再び，

$$w^{m+1}=z^{m+1}+(m+1)z^m(w-z)+\frac{1}{2}(m+1)mz^{m-1}(w-z)^2+\cdots$$

と，

$$\partial_w x^i(w)=\partial_z x^i(z)+(w-z)\partial_z^2 x^i(z)+\cdots$$

を使った．

また，

$$\sum_{i=1}^{D} 2ik_i:\partial_z x^i(z)Y(\boldsymbol{k},z):=\partial_z Y(\boldsymbol{k},z)$$

であるので，最終的には

$$[L(m),Y(\boldsymbol{k},z)]=\left(z^{m+1}\frac{d}{dz}+\frac{(m+1)\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}}{2}z^m\right)Y(\boldsymbol{k},z) \qquad \text{(I)}$$

となる．

これを，フレンケル・レパウスキー・マーモンの著書*1)の定理 8.7.7

$$[L(m),Y(v,z)]=\left(z^{m+1}\frac{d}{dz}+h(m+1)z^m\right)Y(v,z) \qquad \text{(II)}$$

と比べてみよう．式 (II) は元 $v\in V_h\subset V_L$ がすべての $n>0$ に対して $L(n)v=0$ となっているとき成立する．頂点作用素代数 V_L では元 e^α の重さは $\dfrac{\langle\alpha,\alpha\rangle}{2}$ で与えられているので作用素積展開で得られた式と同値である．

共形場理論では式 (I) を頂点作用素の公理の 1 つとして扱う．すなわち，その条件を満たすもの全体を考えていくのである．しかし，我々はそこには立ち入らない．

位数最大の散在型単純群モンスターから出発して，保型関数論，頂点作用素代数，現代物理の弦理論と,「群の広がり」を求めてさまよい歩いたが，このあたりできびすを返さないと帰り道を失うことにもなろう．

---

*1) あとがきの中の文献 [12]．

付録1　26個の散在型単純群

群	位数
$Mathieu_1 = M_{11}$	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$
$Mathieu_2 = M_{12}$	$2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11$
$Mathieu_3 = M_{22}$	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$
$Mathieu_4 = M_{23}$	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$
$Mathieu_5 = M_{24}$	$2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$
$Janko_1$	$2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19$
$Janko_2$	$2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$
$Janko_3$	$2^7 \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 19$
$Janko_4$	$2^{21} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^3 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 43$
Higman-Sims	$2^9 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11$
Held	$2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 17$
McLaughlin	$2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11$
Suzuki	$2^{13} \cdot 3^7 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$
Rudvalis	$2^{14} \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 29$
Lyons	$2^8 \cdot 3^7 \cdot 5^6 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 67$
O'Nan	$2^9 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 31$
$Conway_1$	$2^{21} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 23$
$Conway_2$	$2^{18} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$
$Conway_3$	$2^{10} \cdot 3^7 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$
$Fischer_1 = F_{22}$	$2^{17} \cdot 3^9 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$
$Fischer_2 = F_{23}$	$2^{18} \cdot 3^{13} \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 23$
$Fischer_3 = F_{24}$	$2^{21} \cdot 3^{16} \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 29$
$Fischer_4 =$ *Baby Monster*	$2^{41} \cdot 3^{13} \cdot 5^6 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 47$
Harada	$2^{14} \cdot 3^6 \cdot 5^6 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19$
Thompson	$2^{15} \cdot 3^{10} \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 31$
Monster=Fischer-Griess	$2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71$

付録2　モンスターの既約表現の次数

$$
\begin{aligned}
d_0 &= 1 \\
d_1 &= 196883 \\
d_2 &= 21296876 \\
d_3 &= 842609326 \\
d_4 &= 18538750076 \\
d_5 &= 19360062527 \\
d_6 &= 293553734298 \\
d_7 &= 3879214937598 \\
d_8 &= 36173193327999 \\
d_9 &= 125510727015275 \\
d_{10} &= 190292345709543 \\
d_{11} &= 222879856734249 \\
d_{12} &= 1044868466775133 \\
d_{13} &= 1109944460516150 \\
d_{14} &= 2374124840062976
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d_{179} &= 1365748748743608060360418889 \\
d_{180} &= 1389885498765845201483202560 \\
d_{181} &= 1615618649711711132875406250 \\
d_{182} &= 1632167096671963677109375000 \\
d_{183} &= 1722488523976517456534375000 \\
d_{184} &= 1738653052519721404472656250 \\
d_{185} &= 1758676269887941622270082030 \\
d_{186} &= 1779663177736331114178708120 \\
d_{187} &= 1982039000444238454944825600 \\
d_{188} &= 2003908672190826872739843750 \\
d_{189} &= 2033142612611578522742187500 \\
d_{190} &= 2074670898400067115585937500 \\
d_{191} &= 2124902475533657217726562500 \\
d_{192} &= 2418669414387959266887598080 \\
d_{193} &= 2588234775310550640452343750
\end{aligned}
$$

付録 3　頂点作用素代数に関する定義，定理

定義 A　有理型頂点作用素代数：有限個の既約加群のみを持つ．整数次数の加群は完全可約．

定義 B　有理型共形元 $e \in V_2$ ：$V_e \cong L(c,0)$ で V_e は有理型の部分頂点作用素代数．特に，頂点作用素代数 V は V_e 加群として完全可約．

定義 C　ムーンシャイン型の頂点作用素代数：$V = \coprod_{i\in\mathbb{N}} V_i$, $\dim V_0 = 1$, $V_1 = 0$, V は正定値不変内積を持つ．

定義 D　フュージョン規則/フュージョン代数：

$$\dim I(S \times T \to U) = N_{S,T,U}$$

$$S \times T = \sum_U N_{S,T,U} U.$$

定義 E　部分頂点作用素代数：

$$V' = V'(\mathbf{1}', \omega', Y').$$

$$\mathbf{1}' = \mathbf{1}, \quad V'_n \subseteqq V_n, \quad Y'(v', z) = Y(v', z), \quad v' \in V'.$$

定義 F　不変内積：

$$\langle Y(a,z)u, v\rangle = \langle u, Y(e^{zL(1)}(-z^{-2})^{L(0)}a,\, z^{-1})v\rangle$$

$$\langle u, v\rangle \cdot \mathbf{1} = Y(e^{zL(1)}(-z^{-2})^{L(0)}u,\, z^{-1})v \text{ の } z^0 \text{ の係数}.$$

頂点作用素代数上の不変内積は常に対称．

不変内積全体のなす空間 $\cong \mathrm{Hom}(V_0/L(1)V_1, \mathbb{R})$．

定義 G　随伴頂点作用素：

$$Y^{\dagger}(v,z) = Y(e^{zL(1)}(-z^{-2})^{L(0)}v,\, z^{-1}).$$

定義 H　頂点作用素代数 V の加群 W：$\mathbb{Q}$ で次数の付けられたベクトル空間 W_n の直和 $W=\coprod_{n\in\mathbb{Q}} W_n$ が次の条件（1）～（9）を満たすとき W を V 加群と言う．

（1）各 $n\in\mathbb{Q}$ に対して W_n は有限次元である．

（2）$n\in\mathbb{Q}$ が十分小さいときつねに $W_n=0$ となる．

（3）各 $n\in\mathbb{Z}$ と各 $v\in V$ に対して $v_n=v_n^W\in\mathrm{End}(W)$ の元が与えられている．さらに $v\in V, w\in W$ に対して $n\in\mathbb{Z}$ が存在して $k\geqq n$ ならばつねに $v_k w=0$ が成立している．

（4）$Y^W(v,z)=\sum_{i\in\mathbb{Z}} v_n z^{-n-1}$ とおくと，$u,v\in V$ のとき

$$Y^W(\mathbf{1},z)=Id_W,$$

ここで $\mathbf{1}$ は V の真空元．

$$z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_1-z_2}{z_0}\right)Y^W(u,z_1)Y^W(v,z_2)$$
$$-z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_2-z_1}{-z_0}\right)Y^W(v,z_2)Y^W(u,z_1)=z_2^{-1}\delta\left(\frac{z_1-z_0}{z_2}\right)Y^W(Y(u,z_0)v,z_2).$$

（5）$L^W(n)=\omega_{n+1}$ とおくと $\{L^W(n), n\in\mathbb{Z}\}$ は $c=rank(V)$ としてヴィラソロ交換関係をみたす．ここで ω は V のヴィラソロ元．

（6）$w\in W_n$ ならば $L^W(0)w=nw$ が成立する．

（7）$\dfrac{d}{dz}Y^W(v,z)=Y^W(L(-1)v,z)$ が成立する．

定理 A　V：単純頂点作用素代数．M：既約 V 加群．$u_1, \cdots, u_n$：V の 0 でない元．$w_1, \cdots, w_n$：M の線形独立な元．そのとき

$$\sum_{i=1}^{n} Y(u_i, z) w_i \neq 0.$$

定理 B　V' が V の部分頂点作用素代数で有理型とするとき V は V' 加群となる．

定理 C　$\widetilde{M}(c,0) = M(c,0)/U(Vir_c)L(-1) \cdot u_0$ には頂点作用素代数の構造が入る．$L(c,0)$ は $\widetilde{M}(c,0)$ の剰余加群として頂点作用素代数になる．

定理 D　e を V_2 の有理型共形元とするとき V_e には (部分) 頂点作用素代数の構造が入る．

定理 E　V：単純頂点作用素代数．A：$Aut(V)$ の中の有限可換部分群．χ：A の既約表現．V^χ：V の A の表現としての既約成分で χ を与えるもの全部の和．このとき，部分頂点作用素代数 V^A も単純で，いかなる χ に対しても V^χ は 0 ではなく頂点作用素部分代数 V^A の既約加群となる (Dong-Mason)．

定理 F　頂点作用素代数 $L\left(\frac{1}{2},0\right)$ は既約加群をただ 3 個だけ持つ．それらは

$$L\left(\frac{1}{2},0\right), \quad L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right), \quad L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{16}\right)$$

である．

定理 G　頂点作用素代数 $L\left(\frac{1}{2},0\right)$ のフュージョン規則

$$L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \times L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = L\left(\frac{1}{2},0\right)$$

$$L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \times L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{16}\right) = L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{16}\right)$$

$$L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{16}\right) \times L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{16}\right) = L\left(\frac{1}{2},0\right) + L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

定理 H　頂点作用素代数 $L\left(\frac{1}{2},0\right)$ の n 個のテンソル積頂点作用素代数は有理型であり，その既約加群は上に述べた 3 個の既約加群の中から任意に n 個選んでそのテンソル積を作ったものに限る．しかもそれらのテンソル積既約加群の間のフュージョン規則は **定理 G** から自然にテンソル積として決まる．

定理 I　有理型頂点作用素代数 V_1, V_2 のテンソル積 $V_1 \otimes V_2$ は有理型である．

定理 J　離散系列：頂点作用素代数 $L(c,0)$ の正定値（ユニタリ）形式を持つ最高ウエイト既約加群 $L(c,h)$ の分類

$$c = c_m = 1 - \frac{6}{(m+2)(m+3)} \quad (m = 0, 1, 2, \cdots),$$

$$h = h^m_{r,s} = \frac{[(m+3)r - (m+2)s]^2 - 1}{4(m+2)(m+3)} \quad (r, s \in \mathbb{N},\ 1 \leqq s \leqq r \leqq m+1).$$

定理 K　有理型頂点作用素代数 $L(c,0)$ の分類

$$c = c_{p,q} = 1 - \frac{6(p-q)}{pq} \quad (p, q \in \{2, 3, 4, \cdots\}).$$

対応する既約加群 $L(c, h_{m,n})$

$$h_{m,n} = \frac{(np - mq)^2 - (p-q)^2}{4pq} \quad (0 < m < p,\ 0 < n < q).$$

付録 4　頂点作用素代数の関係式

(1-1) $\sum_{i\in\mathbb{N}}\binom{m}{i}(u_{q+i}v)_{m+n-i}w$
$$=\sum_{i\in\mathbb{N}}(-1)^i\binom{q}{i}[u_{m+q-i}v_{n+i}w-(-1)^q v_{n+q-i}u_{m+i}w].$$

(1-1)′ $\sum_{i\in\mathbb{N}}\binom{m}{i}(u_{q+i}v)_{m+n-i}$
$$=\sum_{i\in\mathbb{N}}(-1)^i\binom{q}{i}[u_{m+q-i}v_{n+i}-(-1)^q v_{n+q-i}u_{m+i}].$$

(1-2) $(u_m v)_n=\sum_{i\in\mathbb{N}}(-1)^i\binom{m}{i}[u_{m-i}v_{n+i}-(-1)^m v_{n+m-i}u_i].$

(1-3) $[u_m,v_n]=\sum_{i\in\mathbb{N}}\binom{m}{i}(u_i v)_{m+n-i}.$

(1-4) $(u_0 v)_0=[u_0,v_0].$

(1-5) $[u_m,Y(v,z)]=\sum_{i\in\mathbb{N}}\binom{m}{i}z^{m-i}Y(u_i v,z).$

(1-6) $[u_0,Y(v,z)]=Y(u_0 v,z).$

(1-7) $wt(v_n)=wt(v)-n-1.$

(1-8) $wt(v_n w)=wt(v)+wt(w)-n-1.$

(1-9) $\delta(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}z^n.$

(1-10) $z_1^{-1}\delta\left(\frac{z_2+z_0}{z_1}\right)=z_2^{-1}\delta\left(\frac{z_1-z_0}{z_2}\right).$

(1-11) $z_1^{-1}\delta\left(\frac{z_2+z_0}{z_1}\right)=z_2^{-1}\delta\left(\frac{z_1-z_0}{z_2}\right).$

(1-12) $z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_1-z_2}{z_0}\right)-z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_2-z_1}{-z_0}\right)=z_2^{-1}\delta\left(\frac{z_1-z_0}{z_2}\right).$

(1-13) $z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_1-z_2}{z_0}\right)Y(u_1,z_1)Y(u_2,z_2)u_3$
$$-z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_2-z_1}{-z_0}\right)Y(u_2,z_2)Y(u_1,z_1)u_3$$

$$= z_2^{-1}\delta\left(\frac{z_1 - z_0}{z_2}\right) Y(Y(u_1, z_0)u_2, z_2)u_3.$$

(1-14) $n < 0.$ $(z_1 - z_2)^n = \dfrac{1}{(z_1 - z_2)^{-n}} = \dfrac{1}{z_1^{-n}\left(1 - \dfrac{z_2}{z_1}\right)^{-n}}$

$$= z_1^n \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} (-1)^i \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^i$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} (-1)^i z_1^{n-i} z_2^i.$$

(2-1)　$[L(m),L(n)]=(m-n)L(m+n)+\frac{1}{12}(m^3-m)\delta_{m+n,0}c.$

(2-2)　$[L(0),L(n)^k]=-knL(n)^k.$

(2-3)　$$[L(n),L(-n)^k]=2knL(-n)^{k-1}L(0)+\left\{(k-1)kn^2+\frac{1}{12}k(n^3-n)c\right\}L(-n)^{k-1}.$$

(2-4)　$[L(-1),Y(v,z)]=Y(L(-1)v,z)=\frac{d}{dz}Y(v,z).$

(2-5)　$[L(-1),v_n]=-nv_{n-1}=(L(-1)v)_n.$

(2-6)　$[L(0),Y(v,z)]=Y(L(0)v,z)+z\frac{d}{dz}Y(v,z).$

(2-7)　$[L(0),v_n]=(L(0)v)_n+(-n-1)v_n.$

(2-8)　$[L(0),v_n]=(h-n-1)v_n,\ \ v\in V_h.$

(2-9)　$[L(1),Y(v,z)]=Y(L(1)v,z)+2zY(L(0)v,z)+z^2Y(L(-1)v,z).$

(2-10)　$$\begin{aligned}[L(1),v_n]&=(L(1)v)_n+2(L(0)v)_{n+1}+(L(-1)v)_{n+2}\\&=(L(1)v)_n+(2h-n-2)v_{n+1},\ \ v\in V_h\\&=(2h-n-2)v_{n+1},\ \ v\in V_h,\ \ L(1)v=L(2)v=0.\end{aligned}$$

(2-11)　$$[L(n),Y(u,z)]=\left(z^{n+1}\frac{d}{dz}+h(n+1)z^n\right)Y(v,z),\quad v\in V_h,\ \ L(1)v=L(2)v=0.$$

(2-12)　$Y(u,z)v=e^{zL(-1)}Y(v,-z)u.$

(2-13)　$Y(u,z)1=e^{zL(-1)}u.$

(2-14)　$u_{-n-1}1=\frac{1}{n!}(L(-1))^n u.$

(2-15)　$u_nv=(-1)^{n+1}\left(v_nu+\sum_{i\geqq 1}(-1)^i\frac{L(-1)^i}{i!}v_{n+i}\cdot u\right)$，有限和.

あとがき

本書はこれだけ読めば他の文献を読む必要はないというようには書かれていない．むしろその逆で，数学書であるのに完全な証明はあまりつけてない．進んで勉強してみたいという人のために文献をすこしあげよう．本文の中でも多くの結果を引用したが，それらはよく知られているので原論文は引用しない．最近はインターネットなどで論文や本の検索が容易になった．

第1章

第1章は群論は基礎を少しだけ述べた．この章の後半で，鈴木通夫による(CA)-群に関する結果や鈴木の単純群 $Sz(q)$ をとりあげたが，鈴木は昨年5月31日に急逝した．鈴木通夫は日本の現代群論の育て親といえる．この章ばかりでなく，本書を通じて散在型単純群は略称でなく，例えば J_1 は $Janko_1$ と書いた．

［1］　鈴木通夫，群論（上，下），現代数学 18, 19，岩波書店，1977, 78.

［2］　近藤武，群論，岩波基礎数学選書，岩波書店，1991.

［3］　寺田至・原田耕一郎，群論，岩波講座 現代数学の基礎，岩波書店，1997.

第2章

表現論の話題は豊富でひとつの章では述べきれない．ここでは表現論の基礎は仮定し，モンスター群に関するムーンシャイン現象と，昨年の国際数学者会議でフィールズ賞をうけたボーチャズの理論を理解するための必要なことだけ述べた．表現論の本も多くでている．［2］にも簡潔に記述してある．クリフォードの理論とアダムズ作用素に関しては［6］を参考にした．

［4］　永尾汎・津島行男，有限群の表現，数学選書 8，裳華房,1987.

［5］　Isaacs, I. M., Character Theory of Finite Groups, Academic Press, New York, 1976.

[6] Curtis, C. W. and Reiner, I., Methods of representation theory with applications to finite groups and orders, vol.1, John Wiley and Sons, New York, 1981.

第 3 章

モンスターという名はコンウェイがつけたが，そのころ（1973 年）は一般的な言葉としてはなにか「きもちの悪いもの」というニュアンスがすこしはあったらしい．最近はモンスターという言葉はいたるところで使われていて「悪いもの」という印象はあまりない．ブラウアーは初めてこのモンスター群とその位数のことを聞いた時，これはモンスターではない，とても性質のいい群だといったという．モデュラー表現論は群の位数がある素数の 1 乗ベキでちょうど割りきれるときにはブラウアーによる理論があり，異なった指標のあいだにいろいろな関係式が成立することがいえる．1 乗ベキでちょうどわりきれるような素数が 17,19,23,29,31,41,47,59,71 と 9 個もあるモンスターはブラウアーにとってはまったく好ましい群だったにちがいない．それから 3，4 年後，ブラウアーは世を去りモンスターの存在証明もムーンシャイン現象も知ることはなかった．本章で必要な予備知識はつぎの［ 7 ］と，［ 8 ］の中にあるコンウェイの論文から得られるだろう．

[7] Griess, R. L. Jr., The Friendly Giant, *Invent. Math.* **69**, (1982), 1–102.

[8] Finite Simple Groups, edited by M. B. Powell and G. Higman, Academic Press, London, 1971.

第 4 章

ここではモンスター群とムーンシャイン現象を理解するのに必要な程度の保型関数論について述べた．この章は著者のモンスター/ムーンシャインに関する講義録（‘Moonshine’ of Finite Groups, The Ohio State University, Lecture Notes, 1984）を利用した．ムーンシャイン現象に関しては［11］が基本的な論文である．保型関数に関する書物には［ 9 ］,［10］がある．再生性のある関数（級数）は今も研究が続けられている．まとまった結果はあまり発表

されていないようである．マッカイとノートンが主な研究者なので彼らの仕事を検索すれば中間報告は得られよう．

[9]　清水英男，保型関数，岩波数学選書，岩波書店，443，1992.

[10]　土井公二・三宅敏恒，保型形式と整数論，紀伊国屋書店，1976.

[11]　Conway, J. H. and Norton, S. P., Monstrous Moonshine, *Bull. London Math. Soc.* **11**, (1979), 308–339.

第 5 章

頂点作用素代数に関するまとまった本は [12] だけである．しかしこの本で頂点作用素代数を勉強するには相当な忍耐が必要である．最初の 2，3 章だけを読み通すことも容易ではない．しかし序はよく書けていて読みごたえがある．[12] が出版されてからもう 10 年にもなるのだから，ほかの本が現れてもよい．[13] は [12] にくらべて読みやすい．まとめかたも簡明である．頂点作用素代数，頂点代数とか，またその中間のものもそれぞれ有用でいまのところどの定義が一番よいかがはっきりしない．第 5 章の後半でボーチャズの仕事を解説したが，彼の理論を理解するためには，まずキャッツの本 [14] の 11 章 13 節で一般キャッツ・ムーディ代数の概論を学びそれから必要に応じてボーチャズの原論文 [15,16] を読むとよい．一般キャッツ・ムーディ代数は，その定義もまだ良く整理されていない．

[12]　Frenkel, I. B., Lepowsky, J. and Meurman, A., Vertex Operators and the Monster, Academic Press, San Diego, 1988.

[13]　Frenkel, I. B., Huang, Y.-Z., and Lepowsky, J., On Axiomatic Approaches to Vertex Operator Algebras and Modules, Memoir of the American Mathematical Society, No.494, American Mathematical Society, Providence, 1993.

[14]　Kac, V. G., Infinite dimensional Lie algebras, Third Edition, Cambridge University Press, New York, 1990.

[15]　Borcherds, R. E., Generalized Kac-Moody algebras. *J. Algebra*, **115**, (1988), 501–512.

[16]　Borcherds, R. E., Monstrous moonshine and monstrous Lie super-

algebras. *Invent. Math.* **109**, (1992), 405–444.

第 6 章

この章では頂点作用素代数の自己同型とコード頂点作用素代数に関する宮本雅彦の理論を述べた．定義が非常に複雑な頂点作用素代数はそれに関してなんらかの（解けそうな）問題を考えることさえも容易ではない．しかし宮本が定義したコード頂点作用素代数とその加群の理論にはかなり具体性がある．それによって自己同型群がモンスターであるムーンシャイン加群の新しい構成はできたがモンスターそのものに関する新しい結果が証明できたわけではない．宮本が構成したムーンシャイン加群の（単位元の上の）指標形式は近藤武が計算した（第 8 節）．モンスターのその他の元の指標形式も少しずつ計算されている．今のところ全部の元に対して計算できる手法はない．今後の発展が期待される．第 6 節でのべた $L(1/2, 0)$ などの指標形式は種々の方法で導出されている．それらは古典的なヤコビの公式などと結びついていて実に興味深い．

[17]　Miyamoto, M., Binary codes and vertex operator (super)algebras, *J. Algebra*, **181**, (1996), 207–222.

[18]　Miyamoto, M., Representation theory of code vertex operator algebras, *J. Algebla*, **201**, (1998), 115–150.

第 7 章

第 7 章は第 6 章でのべた頂点作用素が現代物理の弦理論に起源をもつことを述べた．弦理論は [19] で学べるがその前に量子力学を勉強しておかないといけない．量子力学は取っつきにくい．わかったようでも，いつまでもわからない．アインシュタインは最後まで量子力学は全面的には信用しなかったそうだ．量子力学の本は数多くある．第 7 章の記述は [20] も参考にした．

[19]　Green, M. B., Schwarz, J. H., and Witten, E., Superstring theory, vol.1, Cambridge University Press, 1987.

[20]　Kass, S., Moody, R. V., Patera, J., and Slansky, R., Affine Lie Algebras, Weight Multiplicities, and Branching Rules, vol.1, University of California, Press, Berkeley, 1990.

索　引

欧　文

ア　行

カ 行

ナ　行

ハ　行

マ　行

ヤ　行

ラ　行

ワ　行

原田耕一郎(はらだ こういちろう)

1941年，群馬県生まれ．1965年，東京大学理学部数学科卒業．名古屋大学理学部助手，プリンストン高等研究所所員，イリノイ大学研究員などを経て，現在，オハイオ州立大学教授．専門は，有限群論．

[主な著書] 群論(岩波講座 現代数学の基礎14)，寺田至・原田耕一郎，岩波書店(1998)．

モンスター　群のひろがり

1999年3月26日　第1刷発行

著　者　原田耕一郎(はらだ こういちろう)

発行者　大塚信一

発行所　株式会社 岩波書店
〒101-8002 東京都千代田区一ツ橋2-5-5
電　話　案内 03-5210-4000

印刷・法令印刷　カバー・半七印刷　製本・松岳社

ISBN4-00-006055-4　Printed in Japan